Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Guanajuato.

CÁLCULO DIFERENCIAL

CUADERNO DE TRABAJO
CUARTO SEMESTRE

CÁLCULO DIFERENCIAL
INGLÉS IV
FÍSICA I
ECOLOGÍA
EMPRENDEDURISMO

Número de registro:
03-2021-121412502300-01

Secretaría de Educación de Guanajuato

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Mensaje de la Directora General

Joven Estudiante:

En todo este proceso de incorporación al mundo profesional, las matemáticas tienen una importancia decisiva, por lo que su aprendizaje en la preparatoria es de la mayor importancia. Veamos por qué.

La competencia lógico matemática, la capacidad de escuchar; la expresión oral clara y la redacción lógica nos permiten incorporar información nueva y transmitirla en cualquier situación, sea escolar o laboral. Estas habilidades son, por lo tanto, la puerta de entrada para conocer todo lo que nos rodea (incluso las demás disciplinas) y para darnos a conocer a quienes nos rodean. Sin estas habilidades básicas no podemos tener éxito en la vida social adulta.

La reflexión sobre el uso cotidiano y su mejor conocimiento conducen aun pensamiento más ordenado, por lo que el aprendizaje de las materias básicas en la preparatoria permite a los alumnos tener un instrumento para clasificar mejor sus ideas.

En todo acto de comunicación, ya sea símbolos, números, de forma oral o escrita, intervienen una serie de elementos necesarios para que dicho acto sea eficaz. O lo que es lo mismo, sin estos componentes el proceso comunicativo no sería posible.

Directorio

Dra. Virginia Aguilera Santoyo
Directora General

Ing. Miguel Espartaco Hernández García
Encargado de la Dirección Académica

C.P Vicenta Martínez Torres
Directora Financiera y Administrativa

Lic. Sara Cecilia Casillas Martínez
Directora de Planeación y Desarrollo

Lic. Carlos Alberto Gorostieta Romero
Director de Vinculación

C.P. Alfredo García Flores
Director de Desarrollo Humano

Lic. Jaime Díaz Zavala
Director de Asuntos Jurídicos

LIA. Reynaldo Nava Garnica
Subdirector de Tecnologías de la Información

C.P. y M.A. Carlos Enrique Mendoza Santibáñez
Titular del Órgano Interno de Control

Comisión Revisora

Cecilia Lara Rodríguez - Directora del Plantad León San Juan Bosco.
Silvia Anahí Jiménez - Directora del Plantel Silao.
Diana Rubio Zarazúa - Directora del Plantel San José Iturbide**.**
Areli Mendiola Gómez - Subdirectora Académica del Plantel Purísima del Rincón.
Silvia Yadira Ramírez Mota - Subdirectora Académica del Plantel Celaya II.
Ma. Concepción Barrientos - Presidente de la Academia Estatal de Comunicación.
Zenzilt Anahí Herrerías Guerrero - Academia Estatal de Comunicación.
Ma. Trinidad Rodríguez Muñoz - Academia Estatal de Comunicación.
Juan José Aviña Hernández - Academia Estatal de Comunicación.
Adriana Frías Ramírez - Academia Estatal de Comunicación.
Pedro Arredondo González - Presidente de la Academia Estatal de Ciencias Experimentales.
Carla Renata Villagómez Balcázar - Secretaria de la Academia Estatal de Ciencias Experimentales.
Gerardo Medina Jiménez – Presidente de la Academia Estatal de Matemáticas.
José de Jesús Leos Mireles - Academia Estatal de Matemáticas.
Néstor José Guevara Ordoñez - Academia Estatal de Matemáticas.
Martha Margarita Martínez Rangel - Presidente de la Academia Estatal de inglés.
María del Carmen Martínez Ávila - Academia Estatal de inglés.
Ma. Elena Campos Campos - Academia Estatal de inglés.
María Leticia Núñez Pascual - Academia Estatal de inglés.
Lilia López Aguado - Academia Estatal de inglés.
Francisco Javier Alcacio González - Academia Estatal de inglés.
Celina Michelle Martínez Felipe - Academia Estatal de Humanidades.
Adela Tierrablanca Estrada - Academia Estatal de Humanidades.
Ma. Inés Rosas Bravo - Academia Estatal de Humanidades.

Colaboración Especial

Mtra. Celia Margarita García Esparza - Coordinadora de Cuerpos Colegiados.

Ing. Julio Cesar Vargas Manríquez — Analista especializado para el área de docencia.

Comité Editorial

Dra. Virginia Aguilera Santoyo
Directora General

Ing. Miguel Espartaco Hernández García
Encargado de la Dirección Académica

Lic. Carlos Alberto Gorostieta Flores
Director de Vinculación

Lic. Jaime Díaz Zavala
Director de Asuntos Jurídicos

Dr. Hugo Rosales Bravo
Jefatura de Investigación

Ing. Diego Armando Villegas Ramírez
Jefatura de Programas Institucionales y Educación a Distancia

Mtra. Mayra Concepción Urrutia Zavala
Jefatura de Docencia

Lic. María Concepción Barrientos Hernández / Plantel Tarandacuao
Presidente Estatal de la Academia de Comunicación

Docentes Participantes

Cuaderno de Trabajo de Cálculo Diferencial.

Gerardo Medina Jiménez - Plantel Comonfort.

Néstor José Guevara Ordoñez - Plantel León.

Sergio Arturo Vargas Aguilera - Plantel Irapuato III.

Olga Lucía Guerrero Zepeda - Plantel Celaya II.

José Manuel Gómez Torres - Plantel San Francisco del Rincón.

Jacqueline Georgina Lugo Martínez - Plantel Apaseo el Alto.

Gloria Alcaraz Gutiérrez - Plantel León.

Angélica Cecilia Jiménez Izarraraz - Plantel Moroleón.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 4
BLOQUE I. 17
CONCEPTOS BÁSICOS DE SISTEMAS DE COORDENADAS, ORIENTACIÓN Y POSICIÓN 17
NÚMEROS REALES. 17
CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES. 17
NÚMEROS RACIONALES 18
NÚMEROS IRRACIONALES 18
PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES 18
LA RECTA NUMÉRICA 19
DESIGUALDADES 20
SIGNOS DE DESIGUALDAD MATEMÁTICA 20
INTERVALOS Y SU REPRESENTACIÓN MEDIANTE DESIGUALDADES. 22
RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA 25
CASO 2: DESIGUALDADES TRIVIALES 28
VALOR ABSOLUTO Y SUS PROPIEDADES 39
RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES QUE INCLUYEN VALOR ABSOLUTO 42
BLOQUE II. 47
FUNCIONES. USOS DE LA DERIVADA EN DIVERSAS SITUACIONES CONTEXTUALES 47
FUNCIONES. CONCEPTOS BÁSICOS. 47
CLASIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE ACUERDO CON SU COMPORTAMIENTO 49
CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES SEGÚN SU FORMA 51
¿CÓMO SE GRAFICA UNA FUNCIÓN? 56
¿QUÉ ES UN POLINOMIO? 61
SUMA DE FUNCIONES POLINÓMICAS 65
RESTA DE FUNCIONES POLINÓMICAS. 67
MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS 69
DIVISIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS. 71
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS. 73

BLOQUE III. 78
LÍMITES. 78
GRAFICACIÓN DE FUNCIONES POR DIVERSOS MÉTODOS 78
LÍMITES 78

TEOREMAS DE LIMITES 81
CÁLCULO DE LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA. 83
LIMITES INDETERMINADOS. 88
BLOQUE IV. 95
LA DERIVADA 95
LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN 95
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. 97
MÉTODOS DE DERIVACIÓN. REGLA GENERAL DE LA DERIVACIÓN. 98
MÉTODOS DE DERIVACIÓN. DERIVADAS CON FÓRMULAS 100
REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES. 101
DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES. 112
DERIVADAS SUCESIVAS 114
APLICACIONES DE LA DERIVADA. CÁLCULO DE VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS CON EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA. 118
CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA 119
CRITERIOS DE LA SEGUNDA DERIVADA 127
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES 134
CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN 138
RELACIÓN DE IMÁGENES 150

Aprendiendo a usar el cuaderno:

Símbolos de Identificación

Rescatando mis Aprendizaje.

Para aprender más

Ejercitando mi habilidad.

¿Qué Aprendí?

Rescatando mis Aprendizaje

Actividad Transversal

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Cálculo Diferencial se ubica dentro del cuarto semestre del Bachillerato Tecnológico. Se estructura formando parte de la integración de los contenidos propios de las asignaturas de Álgebra, Geometría y Trigonometría y Geometría Analítica del campo disciplinar de Matemáticas. Lo anterior, de conformidad con el Acuerdo Secretarial 653, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 04 de septiembre de 2012. Estas horas incluyen el trabajo con las fichas de Habilidades socioemocionales.

El propósito formativo del campo disciplinar de matemáticas es propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases.

Dentro de la asignatura del cálculo diferencial, se busca que el estudiante aprenda a identificar, utilizar y comprender los sistemas de representación del cambio continuo y su discretización numérica con fines predictivos. (SEP, Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior., s.f.)

El presente Cuaderno de trabajo aborda los contenidos centrales a partir del planteamiento de cuatro bloques de trabajo. En cada uno de ellos se invita a la recuperación de saberes previos, se explican los fundamentos teóricos de cada tema, se incluyen ejercicios para comprender el proceso de solución de cada uno de ellos y finalmente, se proponen otros para que el estudiante practique lo aprendido. Al final de cada bloque se incluye una autoevaluación.

Bloque I. Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición. Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales. En este cuaderno, se abordan las desigualdades en las matemáticas, son expresiones algebraicas que deben ser resueltas con la finalidad de conocer los valores que satisfagan a un conjunto de valores con los que pueda ser representado gráficamente en la recta numérica. Se debe de tomar en cuenta que el resolver desigualdades, se puede predecir los valores que pudieran, o no, ser asignados para una representación gráfica y sin caer en una inecuación.

Bloque II. Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales. Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.

Bloque III. Graficación de funciones por diversos métodos. Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función. Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.

Bloque IV. Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada). Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

El trabajo colegiado ha permitido la revisión de la versión anterior del cuaderno de trabajo con la intensión de enriquecerlo con explicaciones más detalladas y la inclusión de ejercicios.

Se espera que la versión disponible para el ciclo escolar enero-junio 2021 brinde a cada estudiante el apoyo necesario para el aprendizaje de la asignatura de cálculo diferencial. Orgullosamente el CECYTE Guanajuato.

Competencias genéricas y disciplinares

Las cinco **competencias genéricas** que desarrollarás en este curso son:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
4. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
5. Participa y colabora de manera efectiva en grupos diversos.

Las seis **competencias disciplinares** que desarrollarás durante el curso son:

Competencia 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.

Competencia 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

Competencia 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Competencia 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

Competencia 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Competencia 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Propósito formativo del campo disciplinar de matemáticas

Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos.

Fuente: Imagen tomada de: http://matechiks.blogspot.com/2015/05/creatividad-en-matematica.html

BLOQUE I

APRENDIZAJE ESPERADO	COMPETENCIAS GENÉRICAS	ATRIBUTOS	COMPETENCIAS DISCIPLINARES	PRODUCTOS ESPERADOS
Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.	8. Trabaja en forma colaborativa. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	* Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. * Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Representar el cambio numérico de patrones de crecimiento en tablas y gráficas. Predecir la situación óptima de un fenómeno de cambio del tipo no lineal y parabólico. Establecer conjeturas del tipo ¿Cómo serán las sumas de funciones crecientes?
Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.	8. Trabaja en forma colaborativa. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	* Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.	8. Trabaja en forma colaborativa. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	* Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	

BLOQUE II

APRENDIZAJE ESPERADO	COMPETENCIAS GENÉRICAS	ATRIBUTOS	COMPETENCIAS DISCIPLINARES	PRODUCTOS ESPERADOS
Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.	1. Se autodetermina y cuida de sí. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	* Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. * Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.	2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	Estimar lo siguiente: Si una población crece exponencialmente, ¿cómo se estima su valor unos años después?
Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).	2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	* Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.	1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	

Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.	4. Se expresa y comunica. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	* Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	
Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.	1. Se autodetermina y cuida de sí. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	* Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. * Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.	1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	

Localiza los máximos, mínimos, las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.	a. Piensa crítica y reflexivamente. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	* Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Localizar en el plano cartesiano las regiones de crecimiento y de decrecimiento de una función dada en un contexto específico. Calcular el máximo de la trayectoria en el tiro parabólico.
	8. Participa en forma colaborativa. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	* Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. * Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. * Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	

BLOQUE III

APRENDIZAJE ESPERADO	COMPETENCIAS GENÉRICAS	ATRIBUTOS	COMPETENCIAS DISCIPLINARES	PRODUCTOS ESPERADOS
Calcula y resuelve operaciones gráficas con funciones para analizar el comportamiento local de una función (los “ceros” de *f*, *f’* y *f’’*). En algunos casos se podrán estudiar los cambios de *f* mediante la tercera derivada.	7. Aprende de forma autónoma. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	* Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Localizar los “ceros” de *f* y sus derivadas hasta el orden tres.

Ejemplos de dosificación para planeación didáctica por parcial. (SEP)

Parcial	Eje	Componente	Contenido central	Contenidos específicos	Aprendizajes esperados/Actividad	75% Horas clase	25% HSE	25% Reforzamiento
PRIMERO	Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición**. Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.	• El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas. ¿Cómo represento el cambio?, ¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo? ¿Qué es el cambio y qué la variación? • Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?	Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.	5	Aplicación de lecciones para desarrollo de Habilidades socioemocionales. Se dedican 20 minutos a la semana para el desarrollo de estas actividades. En el primer parcial se consideran tentativamente 5 semanas.	Representar algebraicamente situaciones contextualizadas y sucesiones numéricas como funciones lineales y cuadráticas. Graficación de funciones algebraicas y trascendentes elementales.
					Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.	5		
					Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.	5		
Fin del Primer Periodo						**15 hrs**	**1 hr 40 min**	**3 hrs 20 min**

SEGUNDO	Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales**. Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.	• ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus representaciones? • ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales? • ¿Se pueden sumar las funciones?, ¿Qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?, ¿Una cuadrática con una lineal?, ¿Se le ocurren otras? • Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto. • Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.	Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.	2	Aplicación de lecciones para el desarrollo de Habilidades socioemocionales del programa Construye T. Se dedican 20 minutos a la semana para el desarrollo de estas actividades. En el segundo parcial se consideran tentativamente 5 semanas.	Interpretación geométrica y física de la derivada.
					Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).	3		
					Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.	2		
					Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.	8		
Fin del Segundo Periodo						**15 hrs**	**1 hr 40 min**	**3 hrs 20 min**

TERCERO	Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Graficación de funciones por diversos métodos**. Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función. Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.	• Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada ¿Dónde se crece más rápido? • Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión? ¿Podrías recortar el papel siguiente con esa gráfica?, ¿Qué observas?	Localiza los máximos, mínimos, las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.	**9**	Aplicación de lecciones para el desarrollo de Habilidades socioemocionales del programa Construye T. Se dedican 20 minutos a la semana para el desarrollo de estas actividades. En el tercer parcial se consideran tentativamente 6 semanas.	Ejercitar derivación de funciones polinomiales. Determinación de ceros de funciones polinomiales, hasta grado 3, factorizables.
	Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada)**. Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).	• Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la derivada primera y la segunda derivada de una función. Interpretación física de los puntos singulares. • Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos, no mayor a la tercera derivada. ¿Existen caminos directos para derivar?, ¿Qué métodos conocemos? • Predice el comportamiento en el crecimiento de un proceso de cambio en el dominio continuo (variables reales) y en el dominio discreto (variables enteras).	Calcula y resuelve operaciones gráficas con funciones para analizar el comportamiento local de una función (los ceros de f, f ‘y f ‘’). En algunos casos, se podrán estudiar los cambios de f ‘’ mediante la tercera derivada.	**9**		
Fin del Tercer Periodo						**18 hrs**	**40 min**	**5 hrs 20 min**
SUBTOTALES						**48 hrs**	**4 hrs**	**12 hrs**
TOTAL DE HORAS						**64 hrs**		

Dosificación semanal orientativa de la asignatura de Cálculo diferencial, primer periodo

	SEMANA	1				2				3				4				5			
	SESIÓN	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
	REFORZAMIENTO																				
	HSE																				
APRENDIZAJES ESPERADOS	Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.																				
	Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.																				
	Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.																				
	REFORZAMIENTO																				

Dosificación semanal orientativa de la asignatura de Cálculo diferencial, segundo periodo

	SEMANA	6				7				8				9				10			
	SESIÓN	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
	REFORZAMIENTO																				
	HSE																				
APRENDIZAJES ESPERADOS	Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.																				
	Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cubicas).																				
	Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.																				
	Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.																				
	REFORZAMIENTO																				

UNIDAD I

BLOQUE I.

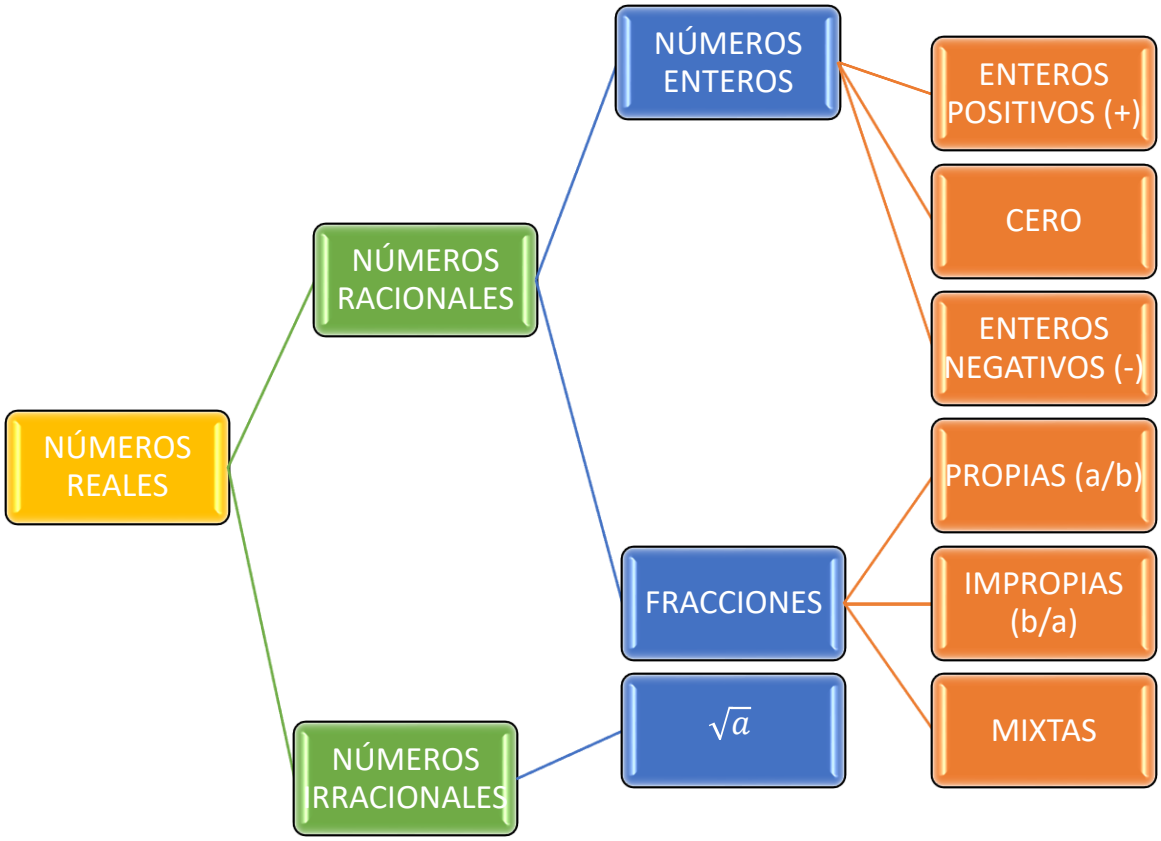
CONCEPTOS BÁSICOS DE SISTEMAS DE COORDENADAS, ORIENTACIÓN Y POSICIÓN

Para aprender más

NÚMEROS REALES.

Clasificación de los números reales.

Los números reales son todos los números que se pueden representar en la recta numérica. La unión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de los números reales.



Números racionales

Los números racionales son los números enteros positivos y negativos, el número cero y los fraccionarios de la forma a/b siendo a y b números enteros y b≠0.

Números enteros (positivos negativos y cero): …..,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,……

Fracciones (positivas y negativas): $\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{5}, \quad -\frac{4}{7}, \quad -\frac{1}{20}$

Los números racionales pueden expresarse por decimales finitos o infinitos periódicos.

Decimal finito: $\frac{1}{4} = 0.40; \quad -\frac{1}{20} = -0.05$

Decimal infinito o periódico: $\frac{2}{3} = 0.66666 \ldots ; \; -\frac{61}{7} = 0.714285 \ldots$

Números irracionales

Los números que no se pueden expresar como decimales finitos ni periódicos se denominan números irracionales. Los números irracionales no se pueden expresar como una relación entre números enteros. Ejemplos de números irracionales:

$$\sqrt{2} = 1.4142135 \ldots \quad \pi = 3.1415926 \ldots \quad \sqrt[3]{5} = 1.3797296 \ldots$$

Propiedades de los números reales

Se distinguen dos categorías: propiedades algebraicas y propiedades de orden.

Las propiedades algebraicas dicen que los números reales pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos (excepto por cero) para generar más números reales bajo las reglas de aritmética usual. A continuación, se especifican algunas propiedades algebraicas en las operaciones de suma y producto de números reales:

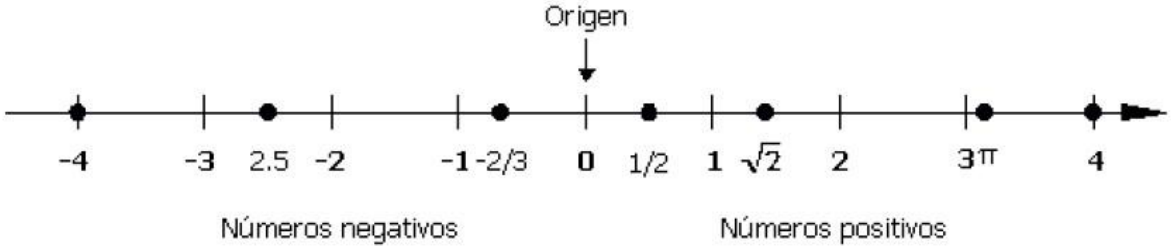
PROPIEDAD		
Asociativa:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Conmutativa:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Identidad:	$existe\ número\ 0\ tal\ que\ a + 0 = a$	$existe\ un\ número\ 1\ tal\ que\ a \cdot 1 = a$

Rescatando mi Aprendizaje

La recta numérica

Los números reales se representan geométricamente por medio de puntos en la recta numérica. Se llama recta numérica a una línea en la cual están determinados un punto O que se denomina origen y corresponde al número real cero; una dirección positiva que se indica con una flecha, y una dirección negativa una escala para medir longitudes.

En general, la recta numérica se representa en posición horizontal, considerando positiva la dirección hacia la derecha del punto O. De esta manera los números que corresponden a los puntos a la derecha de O en la figura son los números reales positivos, mientras que los que corresponden a puntos a la izquierda de O son los números reales negativos. El cero no es positivo ni negativo.



Propiedades de orden. Las propiedades de orden de los números reales permiten comparar el tamaño de éstos. Estas propiedades son útiles a la hora de resolver *desigualdades.* Hay resultados parecidos cuando se invierten los signos de desigualdad.

Para aprender más

DESIGUALDADES

La desigualdad matemática es aquella proposición que relaciona dos expresiones algebraicas cuyos valores son distintos**.** Se trata de una proposición de relación entre dos elementos diferentes, ya sea por desigualdad mayor, menor, mayor o igual, o bien menor o igual. Cada una de las distintas tipologías de desigualdad debe ser expresada con diferente signo (> o <, etcétera) y tendrá una reacción a operaciones matemáticas diferente según su naturaleza.

El objetivo de la desigualdad matemática es mostrar que dos sujetos matemáticos expresan valores diferentes**.**

Signos de desigualdad matemática

Podemos sintetizar los signos de expresión de todas las desigualdades matemáticas posibles en los cinco siguientes:

- Desigual a: **≠**
- Menor que: **<**

- Menor o igual que: **≤**
- Mayor que: **>**
- Mayor o igual que: **≥**

Cada una de ellas debe relacionar dos elementos matemáticos. De modo que implicaría que *a* es menor a *b*, mientras que “a>b” significa que *a* es mayor que *b*. En el caso de “*a≠b*”, leeremos la expresión como *a* es desigual a *b*, “*a≤b*”; *a* es menor o igual a *b*, y “*a≥b*” implica que *a* es mayor o igual a *b*.

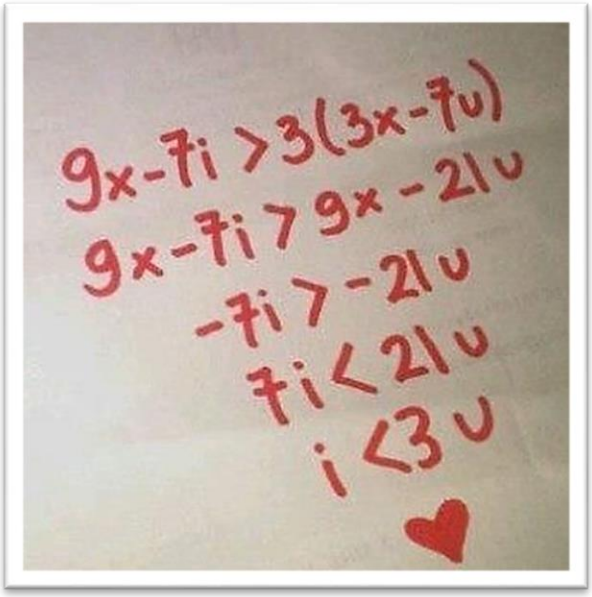
Es también importante conocer que la expresión de desigualdad matemática “a≠b” no es excluyente con las expresiones “*a*” y “*a>b*”, de modo que, por ejemplo, “*a≠b*” y “*a>b*” pueden ser ciertas al mismo tiempo. Por otro lado, tampoco son excluyentes entre sí las expresiones “*a≥b*” y “*a>b*” o “*a≤b*” y “*a*”. (DELSOL, s.f.)

Sean *a, b, c, d* y *k* números reales.

PROPIEDAD	NOMBRE	EJEMPLO
Si a<b y b<c, entonces: a<c	Propiedad transitiva	Si 5<6, y 6 < 7 entonces: 5<7
Si a<b y a<c entonces: a+k<b+k	Suma de una constante.	Si 5<6, y 6 < 7 entonces: 5+3 < 7+3
Si a <b y c < d, entonces a + c < b + d	Suma de desigualdades	Si 4<5 y 6<7, entones: 4+6 < 5+7
Si a<b y c>0, entonces: ac < bc	Producto de una constante positiva	4<5 y c>0, entonces: 4(2)<5(2)=8<10 -No cambia el sentido-
Si a<b y c<0, entonces: ac > bc		Si 4<5; entonces 4(-2)>5(-2)-8>-10 -Cambia el sentido-

NOTA: Cuando se multiplica por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad.

Por ejemplo, dada la desigualdad x < 4, si se multiplican ambos miembros por -3, esto da como resultado -3x > -12. Esto se aplica también a la división por un número negativo. Así, dada la desigualdad -2x > 4, si se dividen ambos miembros de la desigualdad por -2, entonces x < -2.



Fuente: Imagen tomada de: https://ztfnews.files.wordpress.com/2013/02/geek-love__1.jpg

INTERVALOS Y SU REPRESENTACIÓN MEDIANTE DESIGUALDADES.

Al estudiar las desigualdades es conveniente usar la notación y terminología de los conjuntos. Un conjunto es una colección de elementos, tal como el conjunto de los números reales. Si todo elemento de un conjunto *S* es también un elemento de un conjunto *T* entonces se dice que S es un subconjunto de *T.*

El dominio de una variable es el conjunto de los números reales que la variable representa. Por ejemplo, $\sqrt{x}$ es un número real si y solo si $x \geq 0$ y, por lo tanto, el

dominio de x es el conjunto de los números reales no negativos o en notación intervalo [0, ∞), de esta manera:

Un intervalo es un subconjunto o porción de la recta real. Estos se clasifican en finitos e infinitos. A continuación, se presentan los diferentes tipos de intervalos que se utilizarán para resolver desigualdades

El intervalo abierto es el conjunto de todos los números reales mayores que *a* y menores que *b*, donde *a* y *b* son los extremos del intervalo.

$$(a, b) = a < x < b$$

Se observa que los extremos no están incluidos en un intervalo abierto, los intervalos que incluyen sus extremos se llaman intervalos cerrados y se denotan por.

$$[a, b] = a \leq x \leq b$$

El intervalo semiabierto por la izquierda es el conjunto de números reales mayores que a y menores o iguales que b.

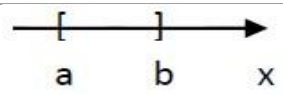
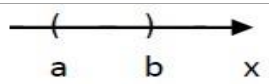
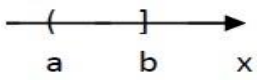
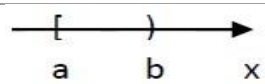
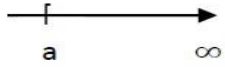
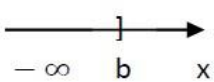
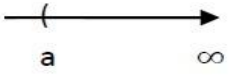
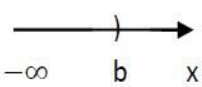
$$(a, b] = a < x \leq b$$

El intervalo semiabierto por la derecha es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b.

$$[a, b) = a \leq x < b$$

Los intervalos anteriores son intervalos finitos. En la siguiente tabla se muestra un resumen de los tipos de intervalos finitos e infinitos, así como su representación gráfica.

Nota: el símbolo ∞ solo es un medio de notación, no es número real. El intervalo (-∞, ∞) representa el conjunto de todos los números reales.

Intervalo	Notación de intervalo	Notación de desigualdad o de conjuntos	Gráfica lineal
Intervalo cerrado	[a,b]	$a \leq x \leq b$	
Intervalo abierto	(a,b)	$a < x < b$	
Intervalo semiabierto por la izquierda	(a,b]	$a < x \leq b$	
Intervalo semiabierto por la derecha	[a,b)	$a \leq x < b$	
Intervalo infinito cerrado por la izquierda	[a,∞)	$a \leq x$	
Intervalo infinito cerrado por la derecha	(∞,b]	$x \leq b$	
Intervalo infinito abierto por la izquierda	(a,∞)	$a < x$	
Intervalo infinito abierto por la derecha	(∞,b)	$x < b$	

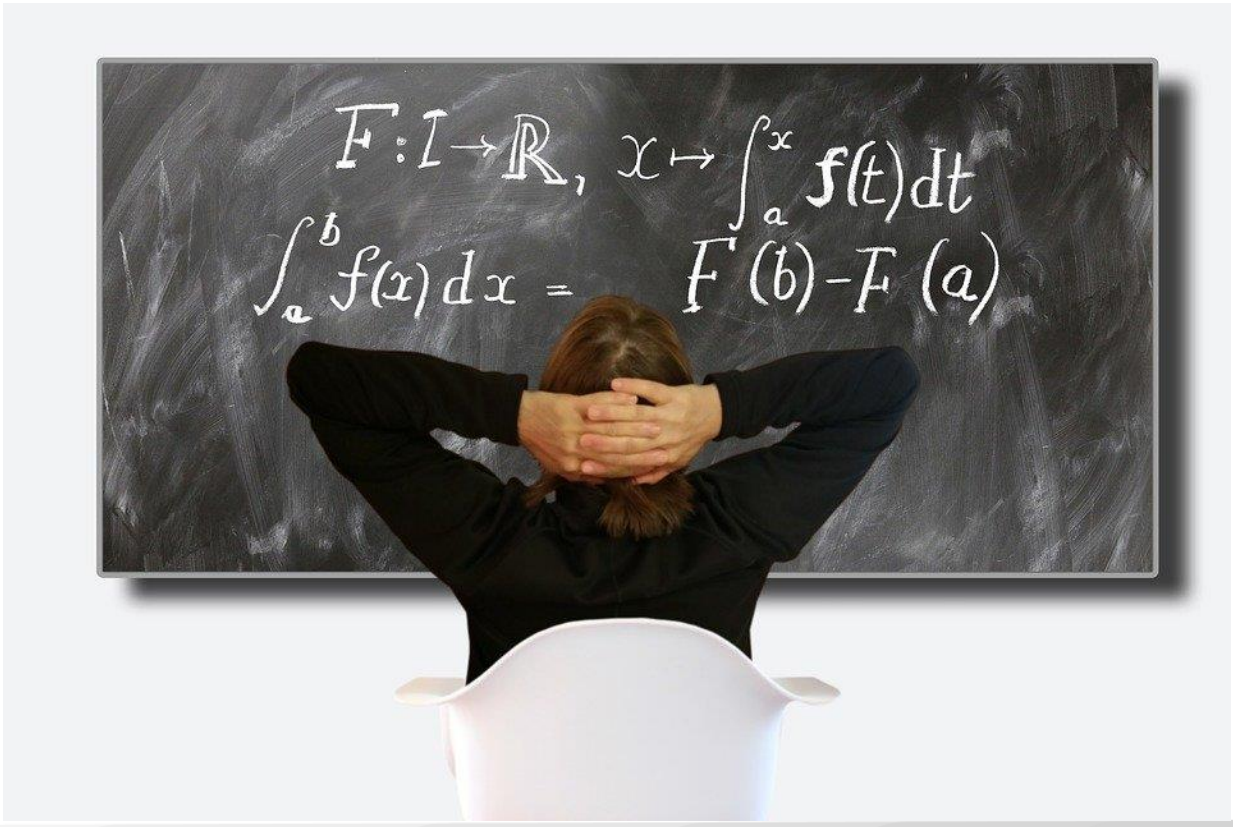
Para aprender más

RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Como ya se había explicado, una desigualdad es la relación matemática en la que se tiene en cuenta el orden de los números. Las expresiones pueden contener números, variables o ambos. Por ejemplo: a<b; x>3 ó 5x+3<0

Resolver una desigualdad consiste en hallar todas sus soluciones, es decir, encontrar todos los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad.

Para este propósito se utilizan las propiedades de orden. La solución de una ecuación es, por lo general, un intervalo o una unión de intervalos de números reales. Es conveniente ilustrar la solución de una desigualdad en la recta numérica.



Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com junio 2021

Ejercicios resueltos

Caso 1: Desigualdad lineal

a) Resuelva las siguientes desigualdades expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica

a) $x+1>3$

$x+1-1>3-1$

$x>2$ Conjunto solución

Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(2,\infty)=\{x: x>2\}$

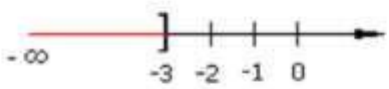
b) $4-2x\geq 10$

$4-4-2x\geq 10-4$

$-2x\geq 6$

$\frac{-2x}{-2}\leq\frac{6}{-2}$

$x\leq -3$ Conjunto solución



Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(-\infty,-3]=\{x: x\leq -3\}$

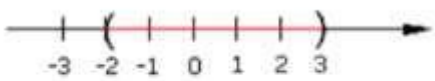
c) $-4<5t+6<21$

$-4-6<5t+6-6<21-6$

$-10<5t<15$

$\frac{-10}{5}<\frac{5t}{5}<\frac{15}{5}$

$-2<t<3$ Conjunto solución



Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(-2,3)=\{t: -2<t<3$

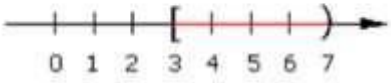
d) $2\leq 3m-7<14$

$2+7\leq 3m-7+7<14+7$

$9\leq 3m<21$

$\frac{9}{3}\leq\frac{3m}{3}<\frac{21}{3}$

$3\leq m<7$ Conjunto solución



Representación Gráfica

Notación de Intervalo y de conjunto

$(3,7)=\{m: 3\leq m<7\}$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones. - Encuentre el conjunto solución de cada una de las desigualdades siguientes. Además, determinar: la gráfica, la notación de intervalo y la notación de conjuntos.

N°	DESIGUALDAD	RESULTADO
1.	$x - 3 > 5$	
2.	$9 - 3x \leq 2$	
3.	$2x + 16 \leq 26$	
4.	$10x + 1 > 8x + 5$	
5.	$4 < 5 - 3x < 7$	
6.	$2x + 6 < -2$	
7.	$8x > 12x - 20$	
8.	$3x - 5 \geq 7$	
9.	$-2 < 1 - 5x \leq 3$	
10.	$4x - 7 < 3x + 5$	
11.	$-6 < 2x + 3 < -1$	
12.	$x + 5 \leq 0$	
13.	$3x + 5 > 7x - 17$	
14.	$-3 < 4x - 9 < 11$	
15.	$2x - 1 \geq 0$	

Para aprender más

Caso 2: Desigualdades triviales

Las desigualdades triviales tienen como solución el conjunto vacío ∅ o bien toda la recta real **R**. Es decir, que en ambos lados de la desigualdad nos arroje una cantidad constante y de ella determinar su validez o no.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1: Resuelva las siguientes desigualdades expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica

$$\frac{1}{4}(2-4x)-6 \leq 4-x$$

Solución: Es recomendable en desigualdades con fracciones multiplicar por el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los denominadores en ambos lados de la desigualdad a fin de evitar trabajar con fracciones. En este caso el m.c.m. de los denominadores es 4 porque la desigualdad tiene la fracción $\frac{1}{4}$.

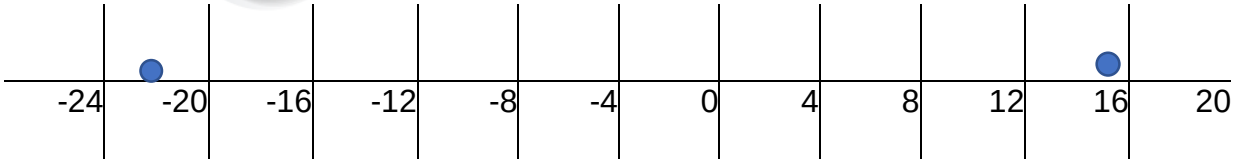
$$4\left[\frac{1}{4}(2-4x)-6 \leq 4(4-x)\right]$$

Se distribuye el 4 y luego se simplifica la desigualdad.

$$[(2-4x)-24 \leq (16-4x)]$$

$$-22-4x \leq 16-4x$$

$$-22 \leq 16$$



El resultado de la desigualdad se cumple para cualquier valor de *x*. Por tanto, el conjunto solución es R.

Ejemplo 2.- Resuelve la siguiente desigualdad:

$$9 - 3x \leq 3(2 - x)$$

Solución: Lo primero es presentarla de forma más fácil de leer, y en este caso se realizan las operaciones de multiplicación (los paréntesis). Esta desigualdad es equivalente a:

$$9 - 3x \leq 6 - 3x$$

Considerando que en ambas partes de la desigualdad el termino con la variable tienen las mismas características, al despejar uno de ellos para el otro lado se eliminan en automático.

$$9 \leq 6$$

(Mira bien, ¡9 no puede ser menor o igual a 6!)

Como no existe ningún *x* que satisfaga esta desigualdad, entonces el conjunto solución es el vacío ∅. Alternativamente se dice que la desigualdad no tiene solución.

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones. - Encuentre el conjunto solución de cada una de las desigualdades siguientes. Además, determinar: la gráfica, la notación de intervalo y la notación de conjuntos.

N°	DESIGUALDAD	RESULTADO
1.	$\frac{x-1}{2}-\frac{1-x}{3}\geq 1$	
2.	$\frac{1-2x}{2}+\frac{3x-1}{3}\geq 0$	
3.	$\frac{4-2x}{6}-\frac{1-3x}{9}\geq 1$	
4.	$4\left(\frac{x+2}{4}-2\right)\geq x$	
5.	$10-4x\leq 4(2-x)$	

Para aprender más

Caso 3: Aplicación de desigualdades en el cálculo

Es muy importante que el estudiante determine para algunas expresiones algebraicas cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real. Es por ello, que debe considerar dos aspectos:

Aspecto 1. En las desigualdades radicales debe tomar en cuenta que se tomará valores ≥ 0, siempre y cuando no se tenga en una racionalización como el denominador, esto debido a que en una raíz no pueden existir soluciones negativas, ni un valor igual a 0 si se tiene la raíz con la variable en el denominador.

Aspecto 2. En las desigualdades de racionalización, si se tiene el término variable en el denominador, es necesario tomar valores, $< 0 >$, sin tomar en cuenta el valor de 0, esto debido a no tendría una solución la desigualdad.

Ejercicios resueltos

Determine para cada expresión algebraica cuales son los valores de la variable que hacen que la expresión esté bien definida y sea un número real.

$$\text{a) } \sqrt{6-4x} \quad ; \quad \text{b) } \frac{3}{4x-5} \; ; \quad \text{c) } \frac{4}{\sqrt[8]{x-2}}$$

Solución:

a) Se toma en cuenta solo la expresión dentro de la raíz $6-4x$ y para que sea un número real el radicando debe ser mayor o igual a 0.

$$6-4x \geq 0$$

Nos damos cuenta de que es una desigualdad lineal (ecuación de grado 1), la cual resolvemos:

Despeja la literal, recuerde que al hacerlo el 6+ cambia a -6 $-4x \geq -6$

Despeja x; el -4 mantiene su signo debido a que la operación que la determina es la multiplicación. $x \leq \frac{-6}{-4}$

Simplifica $x \leq \frac{3}{2}$

Concluimos que: $\sqrt{6-4x}$ se define correctamente y es un número real en (-∞, $\frac{3}{2}$].

b) En esta desigualdad tenemos el término variable en el denominador. Así que el denominador debe ser solamente mayor o menor a cero a fin de que sea un número real. Debe recordar que no puede ser dividido entre 0, (la división entre 0 no está definida). $4x - 5 <> 0$, si y sólo si $4x - 5 <> 0$.

Despeja la literal, recuerde que al hacerlo el -5 cambia a 5 $4x <> 5$

Despeja x; el 4 mantiene su signo debido a que la operación que la determina es la multiplicación. $x <> \frac{5}{4}$

De manera que la expresión $\frac{3}{4x-5}$ se encuentra bien definida y es un número real si y sólo si, para aquellos valores de *x* que satisfacen la desigualdad: 4*x*-5 <> 0, cuya solución es (−∞, $\frac{5}{4}$) u ($\frac{5}{4}$, ∞).

Por tanto, se concluye que: $\frac{3}{4x-5}$ se define correctamente y es un número real (−∞, $\frac{5}{4}$) u ($\frac{5}{4}$, ∞).

c) En esta desigualdad tenemos una raíz con índice par. Así que el radicando debe ser mayor o igual a cero para que sea un número real, pero no olvidemos que no podemos dividir entre 0.

Así pues, la expresión $\frac{4}{\sqrt[8]{x-2}}$ está bien definida y es un número real si y sólo si para aquellos valores de *x* que satisfacen la desigualdad: $x - 2 > 0$,despejando se obtiene que: $x > 2$; lo que da por solución a la desigualdad el intervalo comprendido entre (2, ∞).

Para aprender mas

Caso 4: Desigualdades de segundo grado.

Condición para resolver desigualdades lineales de segundo grado (cuadráticas). Si después de reunir en el primer miembro todos los términos no nulos, se puede factorizar este primer miembro en factores de primer grado, entonces se puede resolver la desigualdad.

Ejercicios resueltos

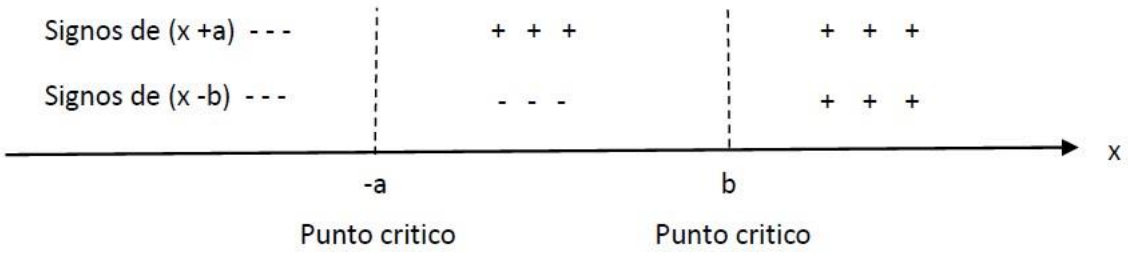
Desigualdad:	$x^2 - c < bx$
Se despeja	$x^2 - bx - c < 0$
Se factoriza la ecuación cuadrática	$(x + a)(x - b) < 0$

Se buscan los valores de x que hagan que el primer miembro sea menor que cero, (es decir, negativo). Los signos de (x+a) (x-b) deben tener signos contrarios para que el resultado sea negativo.

Se tiene que ver si se puede determinar dónde es positivo, negativo o nulo cada factor. El punto en el que un factor se anula se llama punto crítico.

Por consiguiente, (x+a) es negativo para valores de x a la izquierda de –a y es positivo para valores de x a la derecha de –a. Por otra parte, (x-b) es negativo para valores de x a la izquierda de x y positivos para valores de x a la derecha de b.

Combinando los resultados en un eje numérico real sencillo se llega a una solución simple del problema original.



Para aprender mas

Teorema. El valor de x para el cual se anula (ax+b) se llama punto crítico de ax+b. Esta expresión tiene un signo a la izquierda del punto crítico en el eje numérico real y el signo opuesto a la derecha (a≠0)

1. Cuando el signo de relación es < o ≤ los signos de los intervalos deben de ser de signo contrario y se obtiene un intervalo abierto o cerrado dependiendo del signo de relación.

2. Cuando el signo de relación es > o ≥ los signos de los extremos son del mismo signo se obtienen dos intervalos infinitos uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha.

Ejercicios resueltos

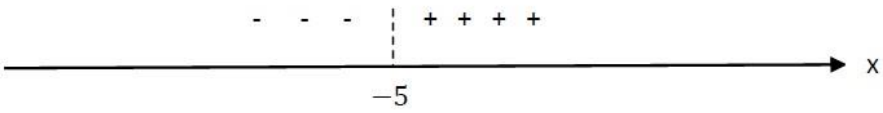
Ejemplo 1:

Resuelva la siguiente desigualdad expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica.

Desigualdad:	$x^2 < 10 - 3x$
Dejando el segundo miembro, de la desigualdad, igual a cero.	$x^2 + 3x - 10 < 0$
Se factoriza el primer miembro de la desigualdad:	$(x + 5)(x - 2) < 0$

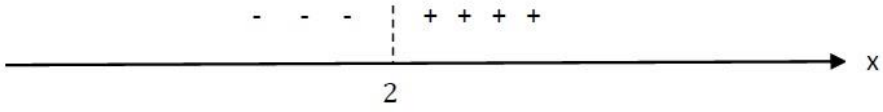
Punto crítico cuando	Es positivo cuando	Es negativo
$x+5=0$	$x+5>0$	$x+5<0$
$x=-5$	$x>-5$	$x<-5$

Signo de $x+5$

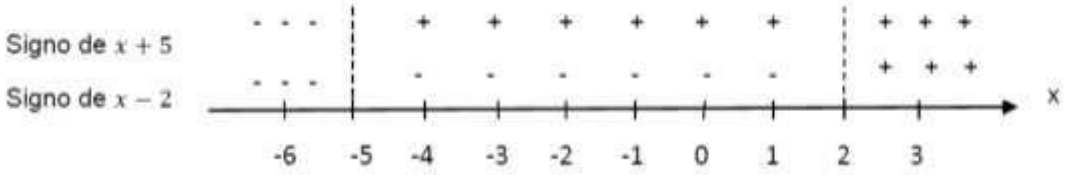


Punto crítico	Es positivo cuando	Es negativo cuando
$x-2=0$	$x-2>0$	$x-2<0$
$x=2$	$x>2$	$x<2$

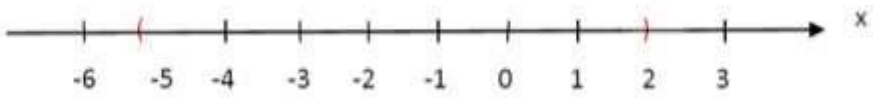
Signo de $x-2$



Se unen las dos gráficas para conocer la solución del problema:



La gráfica del problema



La solución del problema

$$(-5,2)=\{x:-5<x<2\}$$

Ejemplo 2:

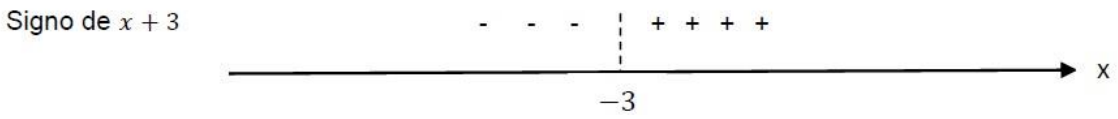
Resuelva la siguiente desigualdad expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación en la recta numérica

$$x^2 + x - 6 < 0$$

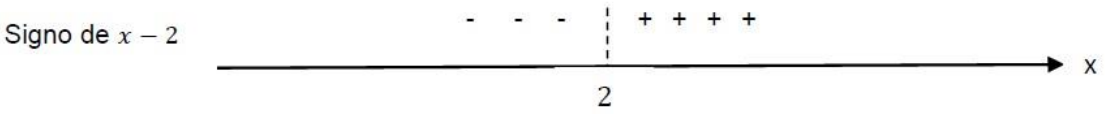
Al factorizar la ecuación en el primer miembro en términos de primer grado se tiene:

$$(x + 3)(x - 2) < 0$$

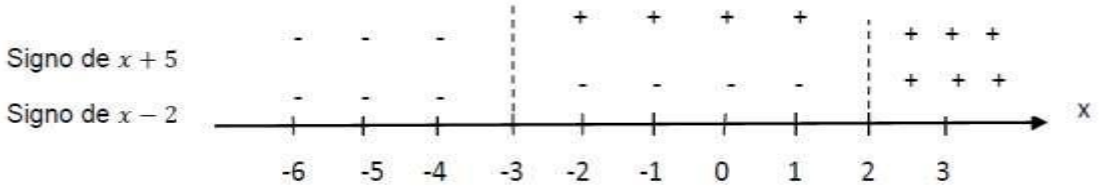
Punto crítico cuando	Es positivo cuando	Es negativo
$x + 3 = 0$	$x + 3 > 0$	$x + 3 < 0$
$x = -3$	$x > -3$	$x < -3$



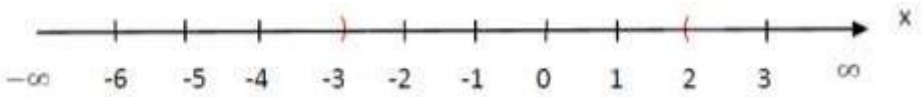
Punto crítico	Es positivo cuando	Es negativo cuando
$x - 2 = 0$	$x - 2 > 0$	$x - 2 < 0$
$x = 2$	$x > 2$	$x < 2$



Se unen las dos gráficas para conocer la solución del problema:



La gráfica del problema:



La solución al problema es: $(-\infty,-3) \cup (2,\infty) = \{x: x < -3\ y\ x < 2\}$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones. - Resuelva las siguientes desigualdades cuadráticas expresando el conjunto solución en términos de un intervalo y su representación gráficas.

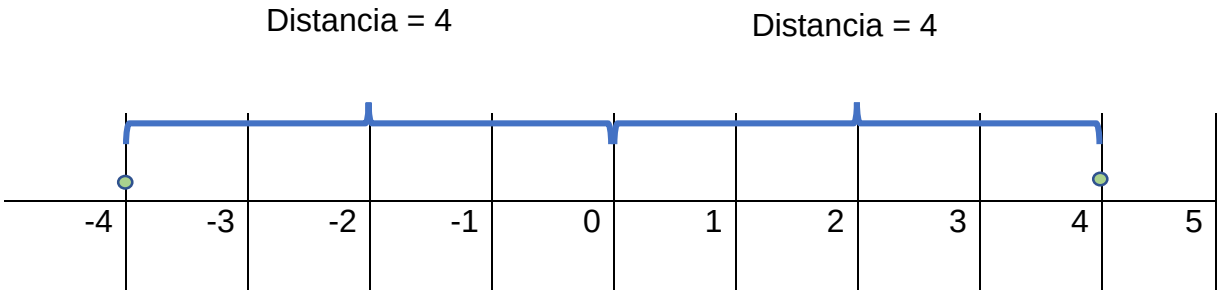
N°	DESIGUALDAD	SOLUCIÓN
1.	$x^2 - 12x + 27 < 0$	
2.	$x^2 + 15x + 36 \geq 0$	
3.	$x^2 + 13x + 36 < 0$	
4.	$x^2 - 9x + 20 \leq 0$	
5.	$2x^2 - 3x - 9 < 0$	
6.	$6x^2 - 7x + 2 \geq 0$	
7.	$8x^2 + x - 9 < 0$	
8.	$y^2 - y - 12 > 0$	
9.	$3y^2 - 2y - 8 < 0$	
10.	$y^2 + 9y - 20 \geq 0$	
11.	$m^2 - 2m - 35 \leq 0$	
12.	$m^2 + 13m + 40 \geq 0$	
13.	$m^2 + 2m \geq 35$	
14.	$z^2 \leq 2 + x$	
15.	$0 \leq 7 + 14z - z^2$	

Para aprender más

VALOR ABSOLUTO Y SUS PROPIEDADES

El valor absoluto o también llamado valor numérico de una cifra, es la distancia entre él mismo con respecto al 0 en una recta numérica. Un valor absoluto se distingue por siempre ser positivo y también se le conoce como el módulo del número.

El valor absoluto de un número x se expresa como | x |, y se lee como “módulo de x”. Por ejemplo, la posición de 4 y −4 en la recta numérica indica que −4 <4, pero que ambos están a la misma distancia de 0. Por lo tanto, se dice que −4 y 4 tienen el mismo valor absoluto.



En el caso de los números reales las generalidades del valor absoluto pueden encontrarse en una amplia variedad de ajustes aritméticos.

Por ejemplo, el valor absoluto puede ser descrito por los cuaterniones, números complejos, los campos, anillos ordenados, así como para los espacios vectoriales. Estos valores están directamente relacionados con los conceptos de distancia, magnitud y norma en la variedad de contextos físicos y matemáticos.

Para cualquier número, si: Entonces | x | = x y si x<0; entonces | x | = -x

Las propiedades fundamentales del valor absoluto son:

No Negatividad: Establece que el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.

Definición Positiva: De acuerdo a esta simple propiedad, si el valor del módulo de un número real x es 0, entonces el valor absoluto de x es 0 y vice-versa.

$$| x | = 0 \; x = 0$$

Propiedad Multiplicativa: Esta significa que el módulo de un producto de dos números es siempre igual al producto de los módulos de ambos números tomados por separado.

$$| x y | = | x | | y |$$

Propiedad Aditiva: En concordancia con la propiedad multiplicativa, establece que el módulo del valor de la suma de dos números es **siempre igual a la suma por separado del módulo de ambos números**.

$$| x + y| = | x | + | y |$$

En combinación con estas cuatro propiedades fundamentales, algunas otras de las propiedades más importantes son:

Simetría: Establece que la definición básica del valor absoluto es, en otras palabras, ignorar el signo negativo.

$$| – x | = x$$

Identidad de Indiscernibles: Equivalente de la definición positiva, establece que, si el módulo de la resta de dos números es 0, entonces los dos números son iguales en su valor.

$$| x – y | x = y$$

Desigualdad Triangular: Puede ser expresada en la forma:

$$| x – y | | x – z | + | z – x |.$$

Preservación de la División: Es el equivalente de la propiedad multiplicativa y establece que el módulo de la división de dos números es siempre igual a la división del módulo de los dos números por separado.

$$| x / y| = | x | / | y | \text{ si } y \neq 0$$

Dos propiedades que pueden ser significativas en algunos casos incluyen:

$$| x | y – y \text{ x } 9$$

$$| x | y \text{ x } -y \text{ o } y \text{ x}$$

Todas las propiedades del valor absoluto pueden ser demostradas de manera idéntica. Para un mejor entendimiento, tomemos un ejemplo de prueba con los siguientes valores:

Demostrar que: : $| 2 – 7 | > | 2 | – | 7 |$

Primero, tomando el lado izquierdo:

$$| 2 – 7 |$$
$$| – 5 |$$
$$| 5 |$$

Resolviendo el lado derecho:

$$| 2 | – | 7 |$$
$$|2 – 7|$$
$$|−5|$$

Por tanto, se puede ver que el lado izquierdo (LI) > lado derecho (LD), es decir, que:

$$| 2 – 7| > | 2 | – | 7 |$$

Ejercicios resueltos

Resolución de desigualdades que incluyen valor absoluto

Ejemplo 1: Resuelva la siguiente desigualdad con valores absolutos. Determine el conjunto solución, la gráfica, la notación de intervalos y la de conjuntos.

$$|2x - 2| < 3$$

$$-3 < 2x - 1 < 3$$

$$-3 + 1 < 2x - 1 + 1 < 3 + 1$$

$$-2 < 2x < 4$$

$$-\frac{2}{2} < \frac{2}{2}x < \frac{4}{2}$$

$$-1 < x < 2$$

Notación de Intervalo y de conjunto

$(-1,2) = \{x: -1 < x < 2\}$

Ejemplo 2: Resuelva la siguiente desigualdad con valores absolutos. Determine el conjunto solución, la gráfica, la notación de intervalos y la de conjuntos.

$$|4x - 3| > 5$$

$4x - 3 < -5$ | $4x - 3 > 5$

$4x - 3 + 3 < -5 + 3$ | $4x - 3 + 3 > 5 + 3$

$4x < -2$ | $4x > 8$

$x < -\frac{2}{4}$ | $x > \frac{8}{4}$

$x < -\frac{1}{2}$ | $x > 4$

Gráfica

Notación de Intervalo y de Conjunto

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (4, \infty) = \left\{x : x < -\frac{1}{2} \text{ y } x > 4\right\}$$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones. - En los siguientes problemas encuentre el conjunto solución de las desigualdades con valor absoluto; grafica y anota la notación de intervalo y la notación de conjunto.

N°	DESIGUALDAD CON VALOR ABSOLUTO	RESULTADO
1.	$\|x+1\|<4$	
2.	$\|3x+4\|\leq 8$	
3.	$\|x-2\|<5$	
4.	$\|x-7\|>3$	
5.	$\left\|\frac{x}{3}-2\right\|\geq 6$	
6.	$\left\|\frac{3}{5}x+1\right\|>4$	
7.	$\|2x+7\|\leq 9$	
8.	$\left\|2+\frac{5}{x}\right\|\geq 3$	
9.	$\|6x+5\|>1$	
10.	$\|x+10\|<6$	

Rescatando mis Aprendizaje (Producto esperado)

Instrucciones Determina si los siguientes números son racionales o irracionales.

1. 27
2. -36
3. e
4. 5/7
5. π

Encuentra el conjunto solución de las desigualdades; gráfica y anota la notación de intervalo y la notación de conjunto.

1. $x - 6 > 3$
2. $\frac{x-1}{5} - \frac{1-x}{4} \geq 3$
3. $\frac{2}{\sqrt[3]{x-4}}$
4. $x^2 < 56 - x$

UNIDAD II

BLOQUE II.

FUNCIONES. USOS DE LA DERIVADA EN DIVERSAS SITUACIONES CONTEXTUALES

Para aprender más

FUNCIONES. Conceptos básicos.

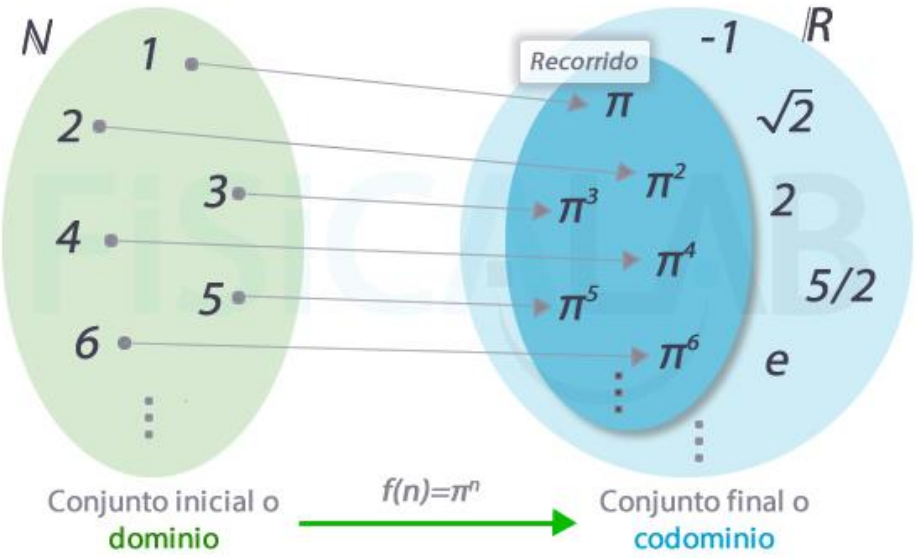
Variable. Es una literal (una letra) a la que se le pueden asignar un número ilimitado de valores; las cuales se designan usualmente con las últimas letras del alfabeto las cuales son p, q, r, s, t, u, w, x, y, z, así como también algunas letras del alfabeto griego como α, β o γ.

- **Constante**. Es una cantidad o literal que tiene valor fijo; se representa con las primeras letras del alfabeto como son a, b, c, d, e, y también de números (enteros, fracciones, positivos o negativos)
- **Función**. Es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto "x" de un conjunto llamado dominio **un valor único** del segundo conjunto "y" llamado rango o codominio. Su nomenclatura es f(x), -nótese que la f es minúscula- y se lee como "f de x".
- **Dominio.** Es el conjunto de objetos a los que la función asigna valores. Su símbolo D.
- **Rango.** Es el conjunto de valores obtenidos de la función. Su símbolo R.
- **Dominio natural.** Es cuando no se especifica dominio para una función, siempre supondremos que es el mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido y de valores de números reales.
- **Imagen**. Se le denomina así al número "y".
- **Relación.** El concepto de relación implica la idea de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que forman parejas ordenadas. la correspondencia que hay entre TODOS o ALGUNOS del primer conjunto con UNO o MÁS del segundo conjunto.

EJEMPLO:

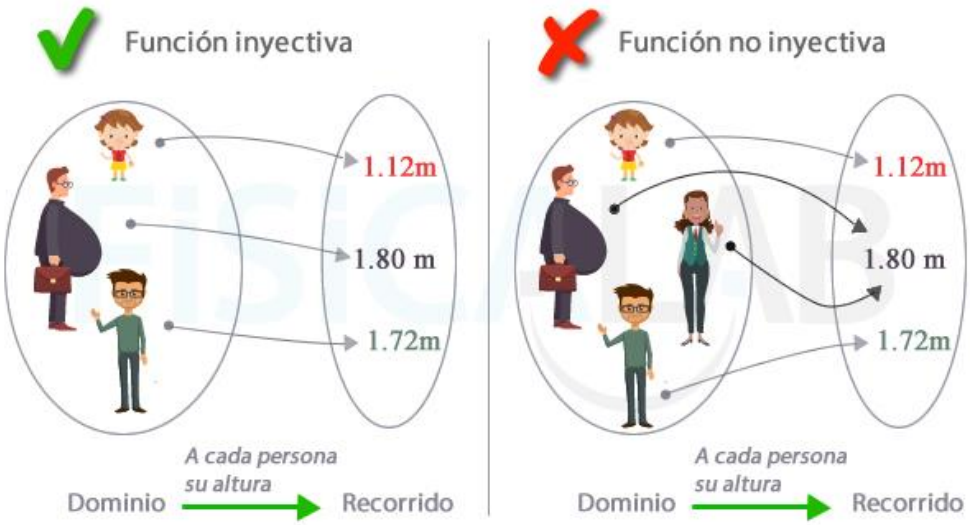
Ecuación	Función	En este ejemplo:
$y = x + 5$	$f(x) = x + 5$	Variable = x
		Constante = 5
Si se asigna el valor al dominio x = 3	Sustituyo en la función: $f(3) = (3) + 5 = 8$	Por tanto, condominio o rango es y = 8

Recorrido de una función. Se define como el subconjunto de "y" formado por todas las imágenes de los números de x. "El conjunto imagen o recorrido de la función es el subconjunto del codominio formado por los valores que realmente toma la función, una vez se aplica a los elementos del conjunto inicial o dominio. En el caso del ejemplo anterior sería el subconjunto de los reales y que se obtienen al aplicar, a cada número natural n, y=πn." (FÍSICALAB, s.f.)



Clasificación de una función de acuerdo con su comportamiento

Función inyectiva. Es cuando a cada elemento del conjunto "x" (dominio) le corresponde un solo valor distinto en el conjunto "y" (imagen) de *f* (función) tal que, en el conjunto "x" no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen. En otras palabras, de todos los pares (x, y) que pertenecen a la función, la "y" no se repite.



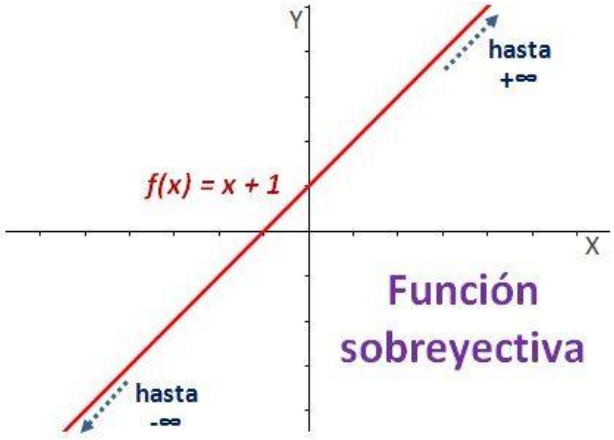
NOTA: Inyectiva vs no inyectiva

A la izquierda, una función que asocia a cada persona su altura. A cada elemento del recorrido llega una sola flecha, por lo que la función es inyectiva. A la derecha, la función también asocia a cada persona su altura. En este caso el dominio es ligeramente distinto, y cuenta con una persona más que, curiosamente, tiene la misma altura que el oficinista despreocupado de su peso (1.80m). Como a ese elemento del recorrido llegan dos flechas, la función ya no es inyectiva. (Op.cit)

Función suprayectiva. Es cuando a cada elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio. Es decir; es cuando en la función f(x) = y su recorrido es todo "y".

Por ejemplo, si la función en los números reales está definida por la función: $f(x) = x + 1$, se obtiene una función suprayectiva (o sobreyectiva)

	x	y
A	-1	0
B	0	1
C	1	2
D	2	3

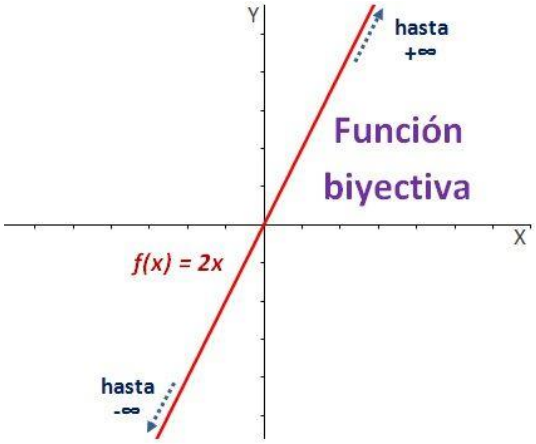


.

Función biyectiva. Es cuando una función es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente. Es una función f con dominio D y contradominio E, siempre que a ≠ b en D entonces f(a) ≠ f(b) en E.

Por ejemplo, si se tiene la función $f(x) = 2x$ definida en los números reales, se obtiene una función biyectiva.

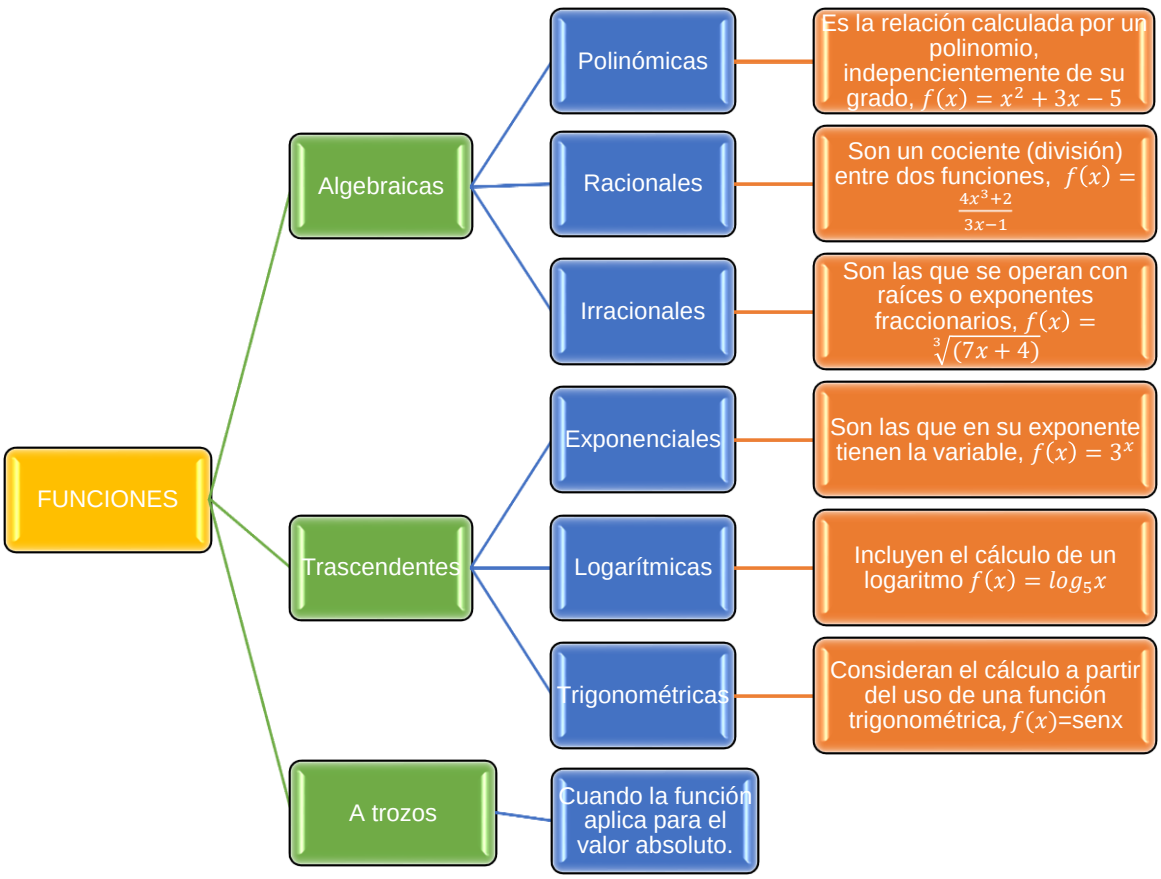
	x	y
A	-1	-2
B	0	0
C	1	2
D	2	4



Rescatando mi Aprendizaje

Clasificación de las funciones según su forma

Una forma de comprender el comportamiento que sigue cada función es asociarlas a una estructura conocida y así facilitar su análisis. La clasificación se presenta de la siguiente forma:



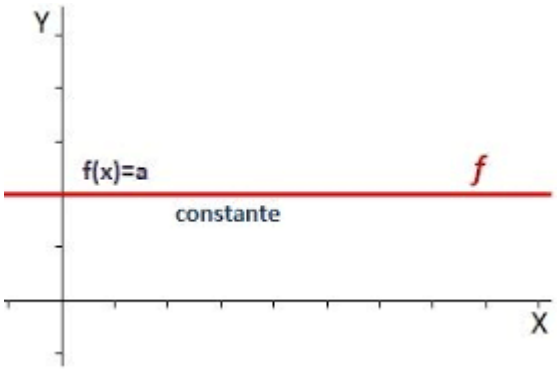
Para aprender más

Función algebraica. Es aquella en la que la dependencia puede expresarse con las operaciones algebraicas: suma y resta con un número limitado de términos, multiplicación con un número limitado de factores, división y potencia con exponente, ya sea fraccionario, positivo o negativo. Por ejemplo:

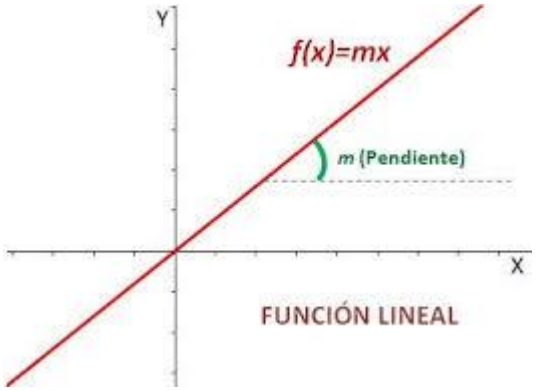
1. $f(x) = 2x + 5$
2. $f(x) = 3$
3. $f(y) = ay + b$
4. $f(x) = \frac{x^2}{6} - x + 5 - \frac{3}{x^4}$

Función polinomial. Es toda función que se pueda expresar de la forma x → P(x) donde P es un polinomio en "x", es decir, una suma finita de potencias de "x" multiplicadas por ciertos coeficientes. En una función polinomial se pueden encontrar las:

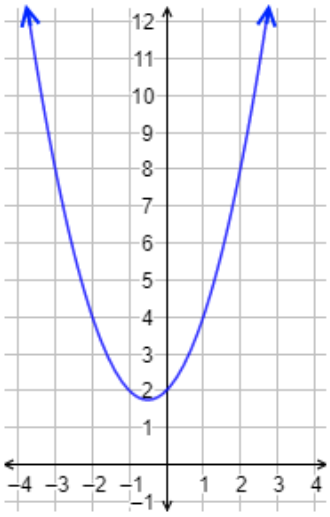
- **Función constante.** Es la función matemática que toma el mismo valor para cualquier variable indepenciente. Se representa por la forma $f(x) = c$.



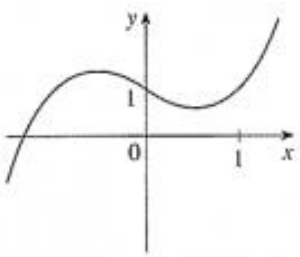
- **Funciones lineales.** Son los polinomios de primer grado o de grado cero que se representa mediante una recta del tipo $y = mx + b$. Donde m es la pendiente, b es el punto de intersección con el eje "y", es decir si x = 0 el punto de intersección con el eje y es B (0, b) Ejemplos de funciones lineales: y = x, y = 2x, y = 4 – 2x, etc.



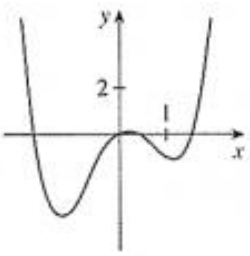
- **Funciones cuadráticas.** Son las funciones de segundo grado que se representan mediante parábolas verticales del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.



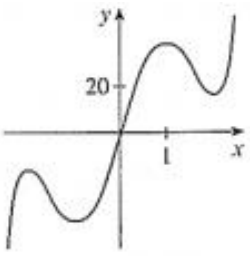
- **Funciones polinómicas**. Son funciones de grado superior a dos.



(a) $y = x^3 - x + 1$

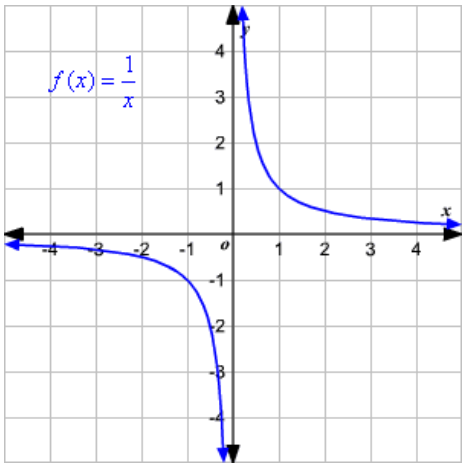


(b) $y = x^4 - 3x^2 + x$

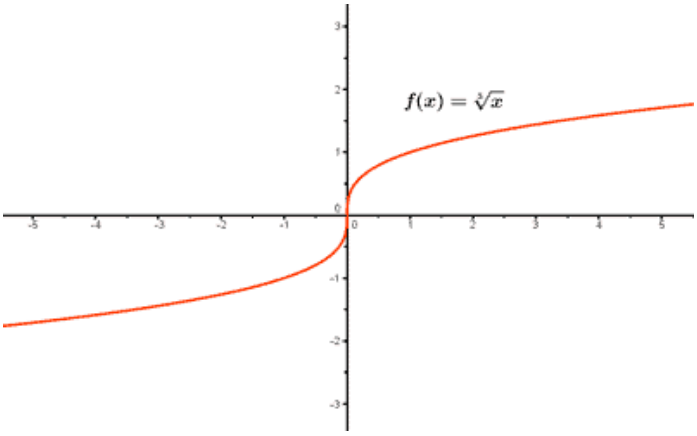


(c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Funciones racionales. Son aquellos que no requieren extracción de raíz.

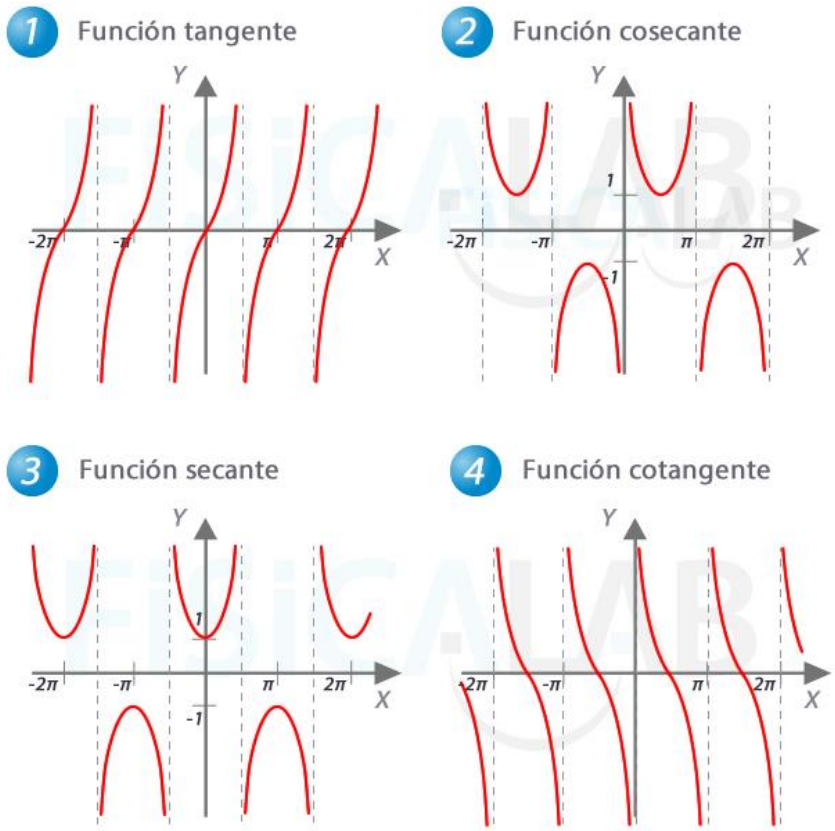


Funciones irracionales o raíz. Son las funciones en que el exponente es una fracción irreducible.

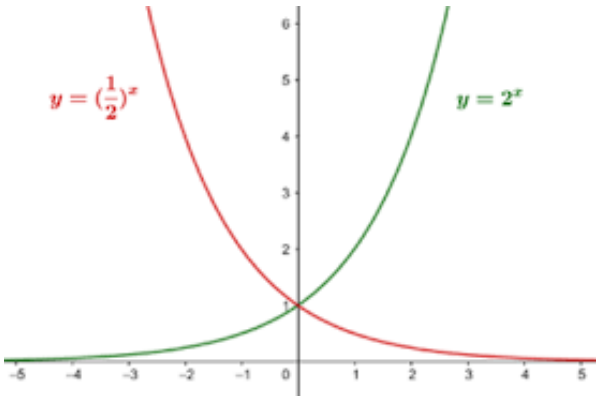


Función trascendente. Es una función que no puede ligarse a la variable independiente por medio de una de las cuatro operaciones algebraicas, efectuadas un número limitado de veces.

Función trigonométrica. Es también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.



Función exponencial. Es aquella en la cual la variable independiente interviene como exponente.



Ejercicios resueltos

¿Cómo se grafica una función?

Una función se puede graficar con el objeto de entenderla más fácilmente. El proceso para hacerlo requiere de tu atención, dado que hay que seguir cuidadosamente de 1, reconocer los signos que tiene cada variable/constante y 2, realizar las operaciones matemáticas considerando su jerarquía.

Lo primero sería construir una tabla de valores (se recomienda hacerla cercana a origen para ubicarla dentro del sistema de ejes), en la que asignará una letra para cada punto a ubicar (en mayúsculas y en orden alfabético).

	x	y
A	-2	
B	-1	
C	0	
D	1	
E	2	

El siguiente paso será sustituir los valores que aparecen referidos a “x” (o dominio) en la variable de la función por los valores propuestos en la tabla. Para este ejemplo, se propone la función $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

NOTA: Se sugiere colocar un paréntesis en cada variable a sustituir para incluir los valores propuestos y evitar omisiones. El resultado de cada operación se ubicará en la columna de las “y” (o rango)

	x	y	Función: $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
A	-2	21	$f(x) = 3(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 3(4) + 8 + 1 = 12 + 8 + 1 = 21$
B	-1	8	$f(x) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 3(1) + 4 + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$
C	0	1	$f(x) = 3(0)^2 - 4(0) + 1 = 3(0) + 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$
D	1	0	$f(x) = 3(1)^2 - 4(1) + 1 = 3(1) - 4 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$
E	2	5	$f(x) = 3(2)^2 - 4(2) + 1 = 3(4) - 8 + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$

Ubicar cada par ordenado o coordenada en un sistema de ejes coordenados. Es importante representar con su letra a cada punto en el plano. Al unir los puntos, se obtiene la siguiente gráfica. Y listo 😊

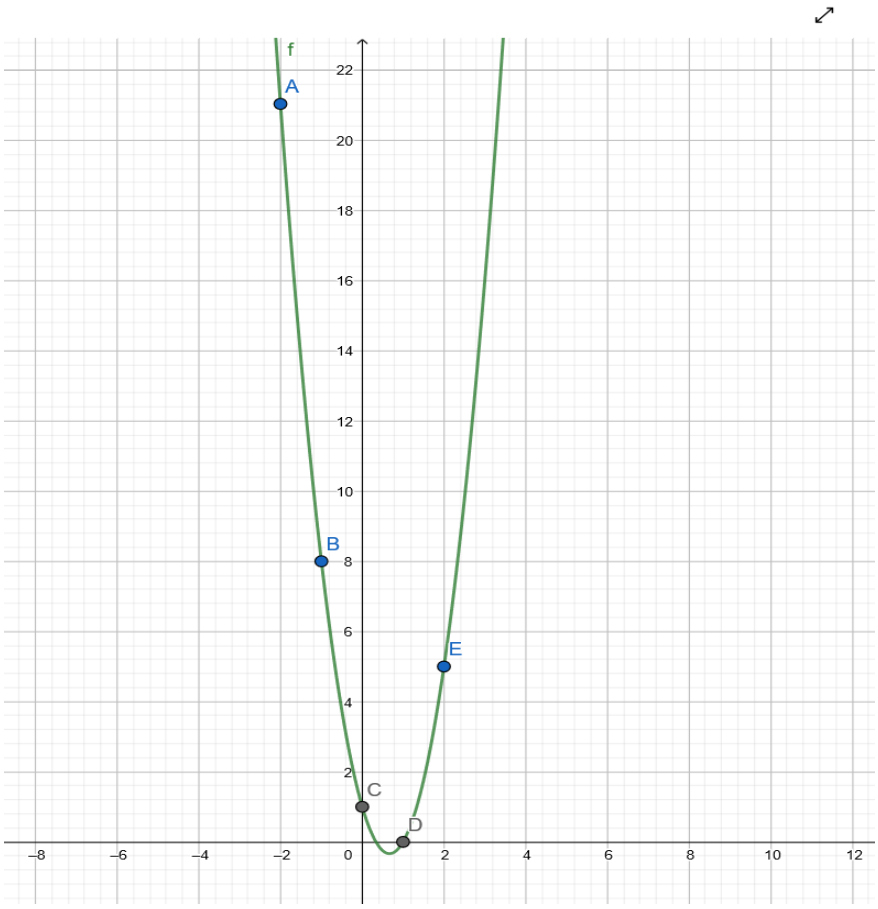
A (-2, 21)

B (-1, 8)

C (0, 1)

D (1, 0)

E (2, 5)

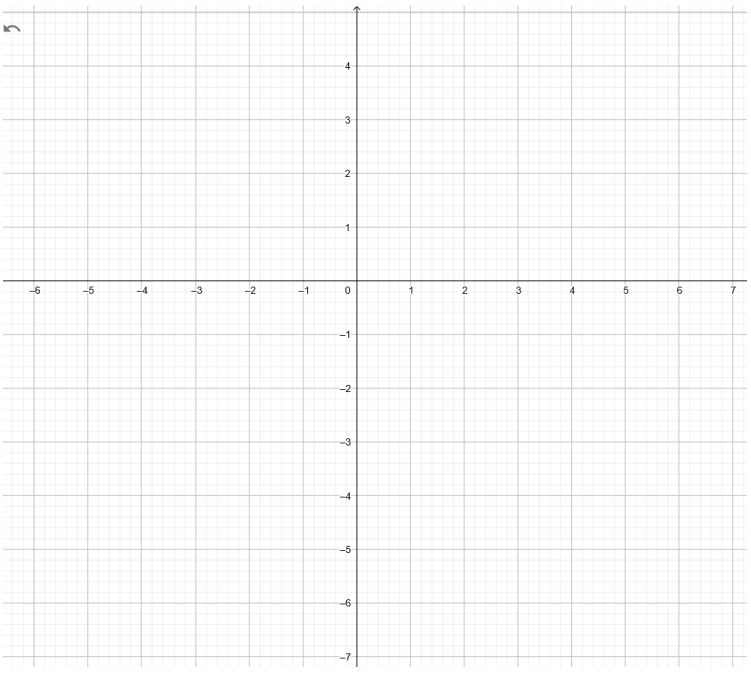


Ejercitando mi habilidad

Instrucciones. - Ahora, grafique las funciones que se solicitan:

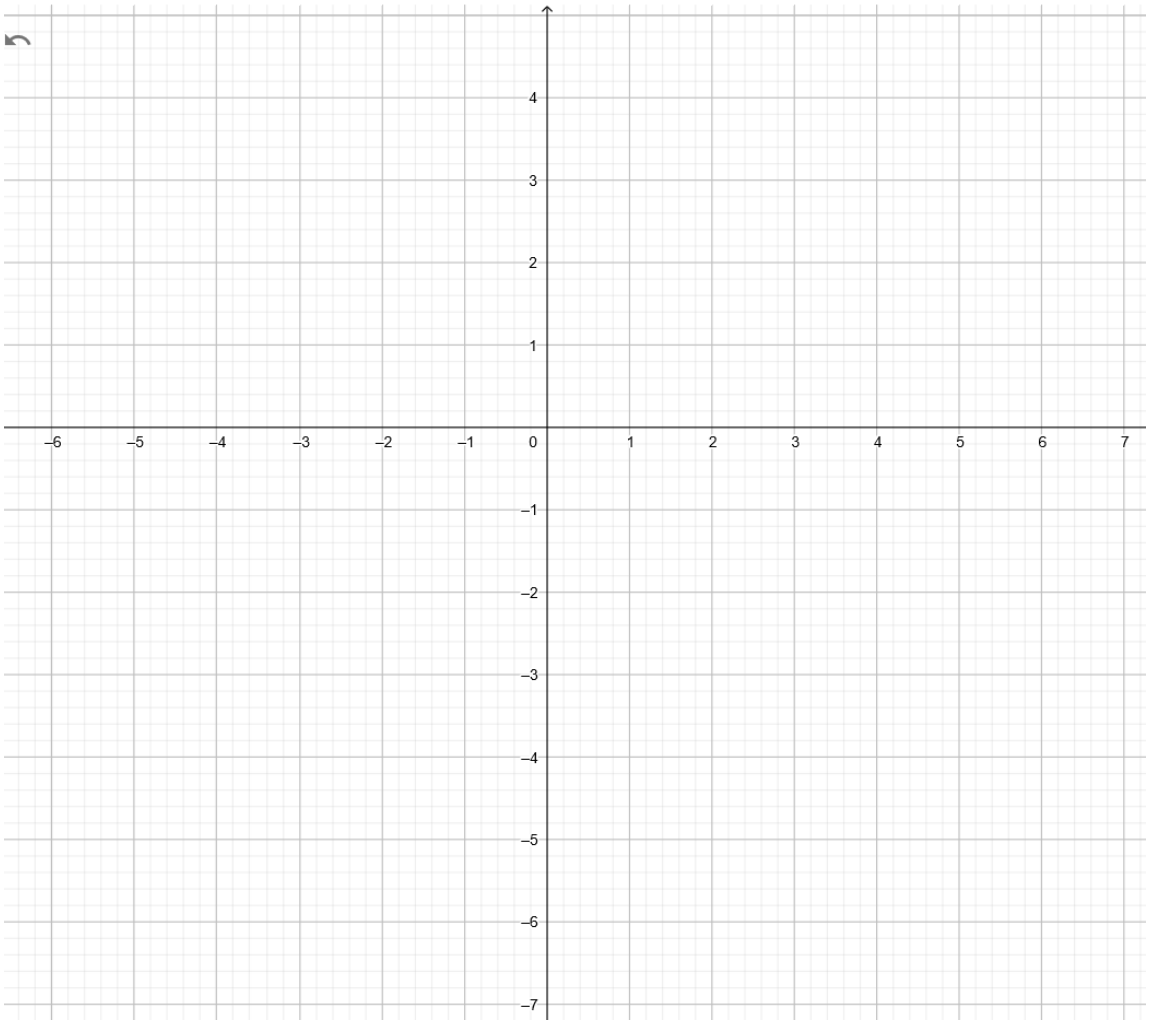
Ejemplo 1	x	y	Función: $f(x) = x^2 - 3$
A	-2		
B	-1		
C	0		
D	1		
E	2		

Grafica en el siguiente plano:



Ejemplo 2	x	y	Función: $f(x) = 6x + 4\sqrt{x}$
A	-2		
B	-1		
C	0		
D	1		
E	2		

Grafica en el siguiente plano:



Rescatando mi Aprendizaje

Operaciones con funciones.

Determina cuáles son las variables a las funciones propuestas y el grado al que corresponden:

Función	Identifica las variables	Grado
$3x2 + 5xy4 - 7yx6$		
$6m4 + 2mn7 - 7m^3n2$		
$4p - 2$		

Para aprender más

¿Qué es un polinomio?

Un polinomio es una expresión algebraica que se compone de varios términos o monomios. El grado de un polinomio está determinado por la variable con el exponente más alto y el orden obedece al acomodo de los exponentes de una variable y por lo general se ordena de forma descendente.

La forma general de una función polinómica es:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Donde $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ son números reales, los exponentes son números naturales, n es un entero no negativo. El dominio de todas las funciones polinómicas son todos los números reales.

Para determinar el grado de un polinomio con una variable se considera el grado mayor de la variable:

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1.

$$2x^4 + 3x - 7$$

Este polinomio tiene 3 términos:

$2x^4$	$3x$	-7

El grado para un polinomio con una variable es el mayor exponente de esa variable, o sea, 4

Ejemplo 2.

$$m - 6m^2 + 3m^4 - 5m^7$$

Este polinomio tiene 4 términos:

m	$2m^2$	$3m^4$	$-5m^7$

El grado para un polinomio con una variable es el mayor exponente de esa variable, o sea, 7

Para determinar el grado de un polinomio con más de una variable se calcula sumando los exponentes de las variables que tenga cada monomio. Revise los ejemplos:

Ejemplo 1.

$$4z^3 + 6y^2z^2 + 7yz$$

Este polinomio tiene 3 términos:

$4z^3$	Tiene grado 3, ya que “z” tiene exponente 3.
$6y^2z^2$	Tiene grado 4, ya que “y” tiene exponente 2; “z” tiene exponente 2, por lo tanto, 2+2=4
$7yz$	Tiene grado 2, ya que “y” tiene exponente 1; “z” tiene exponente 1, por lo tanto, 1+1=2

El grado para un polinomio con una variable es el mayor exponente de esa variable, o sea, 4.

Ejemplo 1.

$$5xy^2 - 3x + \frac{1}{2}y^2z^3 + xy^4z + 6$$

Este polinomio tiene 3 términos:

$5xy^2$	Tiene grado 3, ya que “x” tiene exponente 1; ”y” tiene exponente 2, por lo tanto 1+2=3 .
$-3x$	Tiene grado 1, ya que “x” tiene exponente 1.
$\frac{1}{2}y^2z^3$	Tiene grado 5, ya que “y” tiene exponente 2; “z” tiene exponente 3, por lo tanto, 2+3=5
xy^4z	Tiene grado 6, ya que “x” tiene exponente 1; “y” tiene exponente 4; “z” tiene exponente 1, por lo tanto, 1+4+1=6
6	Tiene grado 0 (cero) ya que no tiene variables.

Para aprender más

¿Sabías que también las funciones pueden mezclarse entre sí?

Las operaciones que se realizan con funciones polinómicas son 5: suma, resta, multiplicación, división y composición. Aplican las reglas algebraicas para su solución.

Ejercicios resueltos

Si considera las funciones $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, y $g(x) = x^2 - 1$, entonces realice las operaciones que se sugieren.

1.	$(2f)(x) =$	Significa que la función *f(x)* se multiplica por 2.	$2f(x) = 2(x^4 - 2x^2 + 1) = 2x^4 - 4x^2 + 2$
2.	$(f + g)(x) =$	Representa la suma de las funciones *f(x)* y *g(x).*	$(f + g)(x) = (x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 - 1)$ $= x^4 - x^2$
3.	$(f - g)(x) =$	Significa que a la función *f(x)* se le restará *g(x).* Debe cuidar el orden de las funciones, ya que $(f - g)(x)$ es diferente a $(g - h)(x)$.	$(f - g)(x) = (x^4 - 2x^2 + 1) - (x^2 - 1)$ $= x^4 - 3x^2 + 2$
4.	$(f * g)(x) =$	Esta es una operación de multiplicación entre ambas funciones.	$(f * g)(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)(x^2 - 1)$ $= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
5.	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	Es una división entre ambas funciones. Debe cuidar el orden de las funciones, ya que $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es diferente a $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$.	$\frac{f}{g}(x) = \frac{(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2 - 1)}$
6	$(f\ o\ g\ ) =$	Es una composición. Se lee “f compuesta con g” Para su operación, se sustituyen las variables de la función f(x) por la función g(x)	$(f\ o\ g\ ) = (x^2 - 1)^4 - 2(x^2 - 1)^2 + 1$
7	$(\ g\ o\ f\ ) =$	En este caso, sustituyen las variables de la función g(x) por la función f(x).	$(g\ o\ f) = (x^4 - 2x^2 + 1)^2 - 1$

A continuación, se explica cada una de ellas.

Suma de funciones polinómicas

La suma de dos funciones se representa por:

$$f(x) + g(x) \quad \text{ó} \quad (f + g)(x)$$

La suma respeta a dos propiedades:

Asociativa: $f(x) + [g(x) + h(x)] = g(x) + [h(x) + f(x)]$

Conmutativa: $g(x) + f(x) = f(x) + g(x)$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones: realiza las sumas que se indican dadas las siguientes funciones.

$f(x) = x^2 + 3$ $\quad g(x) = 2x^2 + 2x - 12$ $\quad h(x) = \sqrt{x}$ $\quad i(x) = \frac{1}{3}x$

$j(x) = 4x^2$ $\quad k(x) = 3x^3 + 8x$ $\quad l(x) = \sqrt{x+4}$ $\quad m(x) = \frac{1}{x}$

OPERACIÓN	SUSTITUCIÓN	RESULTADO
1. $f(x)+g(x)=$		
2. $h(x)+j(x)=$		
3. $i(x)+m(x)=$		
4. $g(x)+i(x)=$		
5. $h(x)+k(x)=$		
6. $f(x)+i(x)=$		
7. $f(x)+j(x)=$		
8. $i(x)+j(x)=$		
9. $k(x)+l(x)=$		
10. $h(x)+m(x)=$		

Resta de funciones polinómicas.

Rescatando mi Aprendizaje

Instrucciones Realiza la resta de las siguientes funciones polinómicas.

a) $(x^2 + xy^3 - 7) - (3x^2 + 4xy^3 + 12) =$

b) $\frac{1}{3}x^2 + 7z^4 - 6) - (5x^2 + z^4 + 9) =$

c) $(6a - 7c + 9b) - (10c - 4b + 6a) =$

Ejercitando mi habilidad

La resta de dos funciones se representa por;

$$f(x) - g(x) \quad o \quad (f - g)(x)$$

Instrucciones Realiza las restas que se indican dadas las siguientes funciones.

$f(x) = x^2 + 3$	$g(x) = 2x^2 + 2x - 12$	$h(x) = \sqrt{x}$	$i(x) = \frac{1}{3}x$
$j(x) = 4x^2$	$k(x) = 3x^3 + 8x$	$l(x) = \sqrt{x+4}$	$m(x) = \frac{1}{x}$

OPERACIÓN	SUSTITUCIÓN	RESULTADO
1. $f(x) - g(x) =$		
2. $h(x) - j(x) =$		
3. $i(x) - m(x) =$		
4. $g(x) - i(x) =$		
5. $h(x) - k(x) =$		
6. $f(x) - i(x) =$		
7. $f(x) - j(x) =$		
8. $i(x) - j(x) =$		
9. $k(x) - l(x) =$		
10. $h(x) - m(x) =$		

Rescatando mi Aprendizaje

Multiplicación de funciones polinómicas

Realiza la multiplicación de las siguientes expresiones y simplifica.

a) $(x^2)(5x^2 + 6y^3)$ =
b) $(x + 7y)(x + y + 2)$ =
c) $(2a - 3b)(4a - 4c)$ =

Ejercitando mi habilidad

La multiplicación de dos funciones se representa por;

$$f(x) \,.\, g(x) \qquad o \qquad (f \,.\, g)(x)$$

Instrucciones Realiza las multiplicaciones que se indican, dadas las siguientes funciones.

$f(x) = x^2 + 3$	$g(x) = 2x^2 + 2x - 12$	$h(x) = \sqrt{x}$	$i(x) = \frac{1}{3}x$
$j(x) = 4x^2$	$k(x) = 3x^3 + 8x$	$l(x) = \sqrt{x+4}$	$m(x) = \frac{1}{x}$

OPERACIÓN	SUSTITUCIÓN	RESULTADO
1. $f(x) * g(x) =$		
2. $h(x) * j(x) =$		
3. $i(x) * m(x) =$		
4. $g(x) * i(x) =$		
5. $h(x) * k(x) =$		
6. $f(x) * i(x) =$		
7. $f(x) * j(x) =$		
8. $i(x) * j(x) =$		
9. $k(x) * l(x) =$		
10. $h(x) * m(x) =$		

Ejercitando mi habilidad

División de funciones polinómicas.

Instrucciones Realiza las siguientes divisiones.

a) $\frac{x^4}{x} =$ b) $10\frac{ac^3}{a^2} =$ c) $\frac{2xy^3z^5}{3x^2z^3}$

La división de dos funciones se representa por $\frac{f(x)}{g(x)}$ ó $\frac{f}{g}(x)$ ó $(f \div g)(x)$

Introducción: realiza las divisiones que se indican, dadas las siguientes funciones.

$f(x) = x^4 - 8x^3 - 19x^2 - 16x + 4$ $i(x) = x + 1$

$g(x) = 3x^5 + 5x^3 + 19x^2 - 3x - 1$ $j(x) = x - 2$

$h(x) = 12x^3 + 15x^2 - 6x$ $k(x) = 3x$

OPERACIÓN	SUSTITUCIÓN	RESULTADO
1. $\frac{f(x)}{i(x)} =$		
2. $\frac{g(x)}{i(x)} =$		
3. $\frac{h(x)}{i(x)} =$		
4. $\frac{f(x)}{j(x)} =$		
5. $\frac{g(x)}{j(x)} =$		
6. $\frac{h(x)}{j(x)} =$		
7. $\frac{f(x)}{k(x)} =$		
8. $\frac{g(x)}{k(x)} =$		
9. $\frac{h(x)}{k(x)} =$		

Para aprender más

Composición de funciones polinómicas.

Evalúa las funciones con los datos indicados. (Evaluar significa sustituir la variable de la función por el valor dado)

Ejercicios resueltos

Ejemplo: Si $f(x) = 4x$; x=10, entonces $f(10) = 4(10) = 40$

FUNCIÓN		
$f(x) = x^3 + x^2$	a) Si $x = -3$	b) Si $x = 3$
$f(x) = 4x^2 + 5x - 1$	c) Si $x = 4$	d) Si $x = \frac{1}{4}$
$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$	e) Si $x = 2$	f) Si $x = \frac{1}{3}$
$f(x) = (x^2 - 3x)(x - 1)$	g) Si $x = 1$	h) Si $x = -1$

Ejercitando mi habilidad

La composición nos permite combinar dos funciones para obtener una nueva función se representa mediante;

$$f \ o \ g(x) = f[g(x)]$$

Introducción: calcula las operaciones indicadas y evalúa en los puntos solicitados.

$f(x) = 2x^2 - 3$ $\quad g(x) = x - 5$ $\quad h(x) = x^2 + x$ $\quad i(x) = \sqrt{x}$

$j(x) = \sqrt{x-3}$ $\quad k(x) = x^2 + 3$ $\quad l(x) = \frac{4}{x}$ $\quad m(x) = x^2 + 3x - 2$

OPERACIÓN	EVALÚE CON RESPECTO A:	RESULTADO
1. (f o g) (x)=	x = 1	
2. (g o f) (x)=	x = -2	
3. (h o i) (x)=	x = 1	
4. (i o h) (x)=	x = -2	
5. (j o k) (x)=	x = 3	
6. (k o j) (x)=	x = 0	
7. (l o m) (x)=	x = 1/3	
8. (m o l) (x)=	x = -2/3	

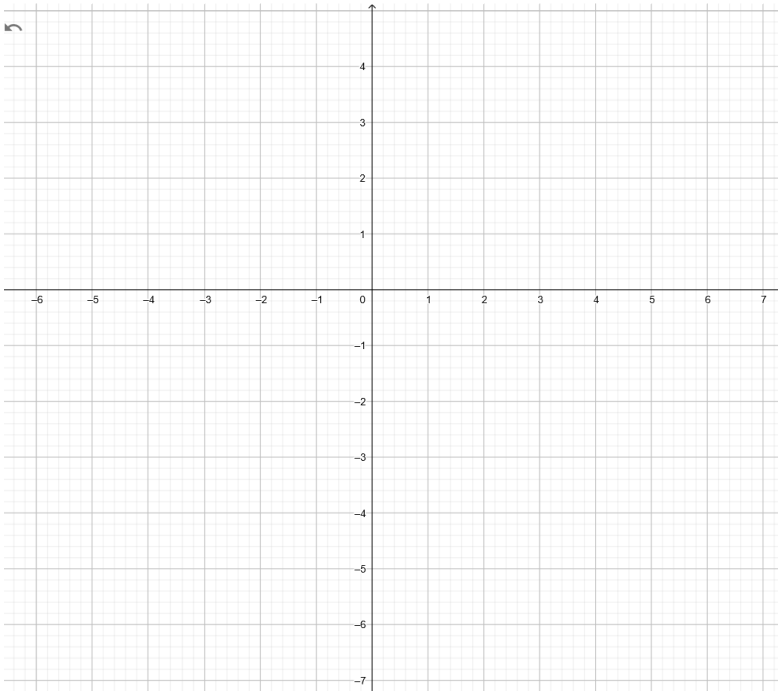
Refuerzo mis Aprendizajes (Producto esperado)

Instrucciones. - Evaluación. Contesta lo que se solicita:

1. Explique qué diferencias existen entre una función y una relación, incluya un ejemplo para cada una.
2. Grafique la siguiente función $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$. Se le sugiere utilizar lápiz y realizar con atención las operaciones aritméticas necesarias atendiendo a la jerarquía de operaciones y uso de los signos.

	x	y	Función:
A	-2		
B	-1		
C	0		
D	1		
E	2		

Grafica en el siguiente plano:



A partir de las funciones:

$f(x) = x^2 + 5x - 3$ $\qquad\qquad$ $g(x) = 2x^2 - 1$

Realice las operaciones que se solicitan:

3. $f(x) + g(x) =$

4. $f(x) - g(x) =$

5. $g(x) - f(x) =$

6. $f(x) * g(x) =$

7. $\frac{f(x)}{g(x)} =$

8. $\frac{g(x)}{f(x)} =$

9. $f\big(g(x)\big) =$

10. $g(f(x)) =$

UNIDAD III

BLOQUE III.

LÍMITES.

GRAFICACIÓN DE FUNCIONES POR DIVERSOS MÉTODOS

Rescatando mi Aprendizaje

LÍMITES

Determina los valores de la función $f(x) = \frac{x+1}{3x+1}$ y anótalos en la siguiente tabla de valores.

x	f(x)
- 1.6	
-1.9	
-2.0	
1.9	
1.6	

¿Hasta dónde llega la curva que se construyó?

¿Es contínua o discontínua?

Para aprender más

El cálculo infinitesimal es la parte de las matemáticas que se ocupa de las operaciones con cantidades infinitamente pequeñas. El cálculo infinitesimal comprende el cálculo diferencial y el integral

Los siguientes son los cuatro problemas cardinales que impulsaron el desarrollo del cálculo a lo largo del tiempo:

1. El problema del área bajo una curva.
2. El problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
3. El problema de establecer la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. Por ejemplo, si dejamos caer una pelota desde lo alto de una torre, a 200 metros (m) sobre el suelo ¿Cómo podemos determinar su velocidad a los tres segundos?
4. Máximos y Mínimos.

Puedes consultar más sobre el tema en:

- Aplicación de los límites en actividades de la vida diaria. Archivo disponible en http://es.scribd.com/doc/44432384/APLICACION-DE-LOS-LIMITES-EN-PROBLEMAS-REALES
- Aplicación de los límites. Video disponible en http://www.youtube.com/watch?v=ovzB4Pg7-UQ&feature=related

Los límites tienen muchas aplicaciones, en principio te sirve para saber qué pasa con una función alrededor de un punto si por ejemplo ese punto no está definido o hay una asíntota (Es la línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca progresivamente a una curva sin llegar nunca a encontrarla).

También tienen aplicación en derivadas, que sirven para calcular aproximaciones de funciones complejas, o cosas más prácticas como por ejemplo si tienes que construir un mueble, cuanta madera necesitas para gastar lo mínimo posible logrando la mayor resistencia, o la máxima cantidad de luz que puede entrar por una ventana según su forma. Tiene muchísimas aplicaciones, los límites son la base de muchos otros conceptos más complejos y muchos teoremas sobre continuidad de funciones también.

Concepto de límite

Concepto de límite. Cuando una variable x se aproxima cada vez más a una constante a de tal manera que la diferencia $x - a$, en valor absoluto, puede ser tan pequeña como se quiera, se dice que la constante a es el límite de la variable x en la función.

Limite es una noción de ubicación. Es la notación intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una función, a medida que los parámetros de esa función se acercan a determinado valor.

Se define como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Lo cual se lee “se puede hacer que *f(x)* sea tan cercana a L como se quiera, si *x* se acerca lo suficiente a “a”.

Para que un límite exista debe cumplir con condiciones:

TEOREMAS DE LIMITES

1) $\lim_{x \to k} k = k$

2) $\lim_{x \to c} x = c$

3) $\lim_{x \to c} k\ f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

4) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

5) $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

6) $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

7) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, *dado que* $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

8) $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$

9) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

Donde tenemos:

- *El límite de una suma es la suma de los límites.*
- *El límite de un producto es el producto de los límites.*
- *El límite de un cociente es el cociente de los límites.*

Consideraciones:

1. Si el límite es igual a cero. $\lim_{x\to a} = 0$ “Si hay límite, su límite es cero”

2. Si el límite es igual a infinito. $\lim_{x\to a} = \infty$ “No existe límite”.

3. Si el límite es igual a cero entre cero. $\lim_{x\to a} = \frac{0}{0}$ “indefinido”.

4. Si el límite es igual a infinito entre infinito. $\lim_{x\to a} = \frac{\infty}{\infty}$ “indefinido”.

Memorizar. Condiciones para límites determinados.

$\frac{0}{c} = 0$ $\quad \frac{c}{0} = \infty$ $\quad \frac{c}{\infty} = 0$ $\quad \frac{\infty}{c} = \infty$ $\quad c + \infty = \infty$ $\quad c \cdot \infty = \infty$

Ejercitando mi habilidad

1. Define el concepto de límite y escribe un ejemplo.

2. ¿Cuándo se dice que un límite no existe?

3. ¿Cuándo se dice que un límite es infinito?

4. ¿Cuándo se dice que un límite es indeterminado?

5. ¿Cuáles son procedimientos algebraicos que podemos utilizar para quitar la indeterminación de un límite?

Para aprender más

Cálculo de límites por sustitución directa.

En este caso, se sustituye el valor de la variable (donde x=1) tantas veces como aparezca en el límite, y se realizan las operaciones aritméticas necesarias hasta obtener su valor.

Ejercicios resueltos

Caso 1. Sustituir el valor de x en la función. Determina el límite de $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+7x^1+5x}{x+1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3(1)^3+7(1)^2+5(1)}{(1)+1} =$$

$$= \frac{3(1)+7(1)+5}{2}$$

$$= \frac{3+8+5}{2} = \frac{15}{2}$$

Caso 2. Determine el siguiente límite: $\lim_{x\to 3}(x^2 - 5x + 6)$

$$\lim_{x\to 3} (3)^2 - 5(3) + 6$$

$$= 9 - 15 + 6 = 0$$

Caso 3. Determine el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \frac{3x-4}{8x^2+2x-2}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3(-1) - 4}{8(-1)^2 + 2(-1) - 2}$$

$$\frac{-3-4}{8-2-2} = -\frac{7}{4}$$

Caso 4. $\lim_{x\to 4}\sqrt{5x-11} = \sqrt{5(4)-11} = \sqrt{20-11} = \sqrt{9} = 3$

Caso 5. $\lim_{x\to\frac{2}{3}} 2x^2+3x-5 = 2\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{6}{3}\right)-5$

$$= \frac{8}{9}+\frac{6}{3}-5$$

$$= \frac{8}{9}+2-5$$

$$= \frac{8}{9}-3$$

$$= \frac{8}{9}-\frac{3}{1}$$

$$= \frac{8-27}{9}$$

$$= \frac{19}{9}$$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Calcula los límites de las siguientes funciones.

N°	LÍMITE	RESULTADO
1.	$\lim_{x\to 0} 5x^3 - 9x^2 + 7x - 6$	
2.	$\lim_{x\to 1} 7x^2 + 8x + 9$	
3.	$\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}$	
4.	$\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3 - 8x + 16x}{x^3 - 16x}$	
5.	$\lim_{x\to 1} 9x + 6x^2 - 7x + 3$	
6.	$\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x^2 - 4}$	
7.	$\lim_{x\to 2} \dfrac{4x + 7}{2x + 1}$	
8.	$\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^4 - 6}{x^2 + 2}$	
9.	$\lim_{x\to a} (7x^2 - 7ax + 4)$	
10.	$\lim_{x\to 4} (x^2 + 3x + 2)$	
11.	$\lim_{x\to 2} (x^3 - 2x^2)$	

12.	$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$	
13.	$\lim_{x\to 6}\left(\dfrac{2x^2+3x-5}{x-2}\right)$	
14.	$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x-2}{x^2-8}$	
15.	$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(3+2\sin x)$	
16.	$\lim_{x\to -\pi}(2-sin\,2x+cos\,x)$	
17.	$\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-4}{x-3}\right)$	
18.	$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+4}$	
19.	$\lim_{x\to 0}\dfrac{5x^2-4}{x^2+2}$	
20.	$\lim_{x\to 2}(7-2x)$	
21.	$\lim_{x\to 3}(4x^2-2x-6)$	
22.	$\lim_{x\to 4}(6-3x)$	
23.	$\lim_{t\to -2}\sqrt{8+t^3}$	
24.	$\lim_{z\to 2}\sqrt{7z^2+14z-7}$	
25.	$\lim_{y\to 2}\sqrt{4y^2-2y}$	

26.	$\lim_{x\to 3} x^2 + 3x$	
27.	$\lim_{x\to 0}(2x-2)^3$	
28.	$\lim_{x\to -3} \frac{3x+2}{11-x}$	
29.	$\lim_{x\to -7} \frac{3x}{\sqrt{2x}}$	
30.	$\lim_{x\to 3} \frac{3x-4}{2x+1}$	
31.	$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{3x+1}$	
32.	$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x+1}{2x^2-3}$	
33.	$\lim_{x\to 0} x\sqrt{x+2}$	
34.	$\lim_{x\to 2} 4x^2 + 3 + 1$	
35.	$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$	

Rescatando mi Aprendizaje

Escribe los nombres de los productos notables que recuerdes, su expresión algebraica y redacta su regla, si cuenta con ella.

N°	PRODUCTO NOTABLE	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	REGLA

Para aprender más

Limites indeterminados.

Si al evaluar la función con el valor "*a"* hacia el cual tiende "*x"*, se obtiene un valor numérico se dice que es un límite determinado. Si cuando evaluamos una función con el valor de "a" hacia el cual tiende "x" y este límite adopta las formas como $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ (las cuales no representan valor de representación) se dice que es un límite indeterminado.

Se tienen propiedades matemáticas para evitar la indeterminación. Los casos de indeterminación son:

CASO DE INDETERMINACIÓN	MÉTODO(S) DE SOLUCIÓN (FISICALAB, s.f.)
$\frac{k}{0}$	Limites laterales
$\frac{0}{0}$	Factorizar (si se puede) Si hay raíces, multiplicar y dividir por el conjugado.
$\frac{\infty}{\infty}$	Comparar el grado de los infinitos
$\infty - \infty$	Comparar el grado de los infinitos. Operar Si hay raíces multiplicar y dividir por el conjugado
$0 * \infty$	Operar
1^{∞}	Buscar e límite cuando “algo” tiende a infinito (1+1 de algo) algo = e
0^{∞} ∞^{0} 0^{0}	Aplicar propiedades Logaritmo $ab = e\ ln\ (ab) = eb * \ln(a)$

Ejercicios resueltos

Cálculo de limites por factorización

Cuando al hacer la sustitución de los valores “a” los que tiende “x”, y resulta un caso de indeterminación, se puede proceder a la factorización.

Ejemplo 1. Sustituir el valor de x en el límite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\quad\frac{(2)^2-4}{2-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

por lo tanto, es indefinida y habrá que encontrar otra forma para determinar su límite, en este caso, por factorización.

Factorizar el numerador por diferencia de cuadrados $x^2-4=(x+2)(x-2)$, quedando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\ =$$

Se cancela (x-2) tanto en numerador como en denominador, quedando:

$$\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2\ \equiv\ 4$$

Ejercitando mi habilidad (Producto esperado)

Instrucciones Determina los límites que se proponen:

N°	LÍMITE	RESULTADO
1.	$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$	
2.	$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$	
3.	$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3+2}{x+2}$	
4.	$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+5x^3+6x^2}{x^2}$	
5.	$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-2x-15}{x^2-4x-5}$	
6.	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta - sin\,\theta}{\sin\theta}$	
7.	$\lim_{a\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a}}{a}$	
8.	$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x^4}{2x^2+6x^4-7x^8}$	
9.	$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{x+2}$	

10.	$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$	
11.	$\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$	
12.	$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$	
13.	$\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-8x+15}{x^z-7x+12}$	
14.	$\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4}$	
15.	$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-8}{x-2}$	
16.	$\lim_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-9}$	
17.	$\lim_{x\to -9} \dfrac{x^2-16}{2x^2+7x-4}$	
18.	$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$	
19.	$\lim_{x_\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x}$	

Rescatando mis Aprendizaje (Producto esperado)

UNIDAD IV

BLOQUE IV.

LA DERIVADA

Para aprender más

LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN

El concepto de derivada es importante y se aplica en casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de cualquier situación, por esta razón, las derivadas son una herramienta del cálculo diferencial en materias como Biología, Física y Química y sus diferentes ramas.

El tema de derivación es una de las operaciones con mucha importancia cuando requerimos hacer uso de funciones reales con variables reales ya que nos permite conocer en cualquier momento la tasa de variación de una función, es decir, para un valor determinado de la variable en un instante, si ésta no es el tiempo.

Otra aplicación que tenemos de este estudio es cuando queremos calcular la derivada de una función en un punto, y también cuando se requiere determinar rápidamente la función derivada de cualquier función de esta forma, la derivada nos dirá con qué rapidez va cambiando el valor de la función en el punto definido. De esta forma puedo obtener resultados precisos en el momento requerido.

Revisa cuáles son los orígenes del cálculo y quiénes fueron sus creadores. Puedes ver el video Newton vs Leibniz, grandes peleas de la ciencia, de Proyecto G, disponible en https://www.youtube.com/watch?v=fOIPCSpCNVA

Rescatando mi Aprendizaje

Realiza las siguientes operaciones algebraicas. En caso de resultados fraccionarios exprese como fracción común.

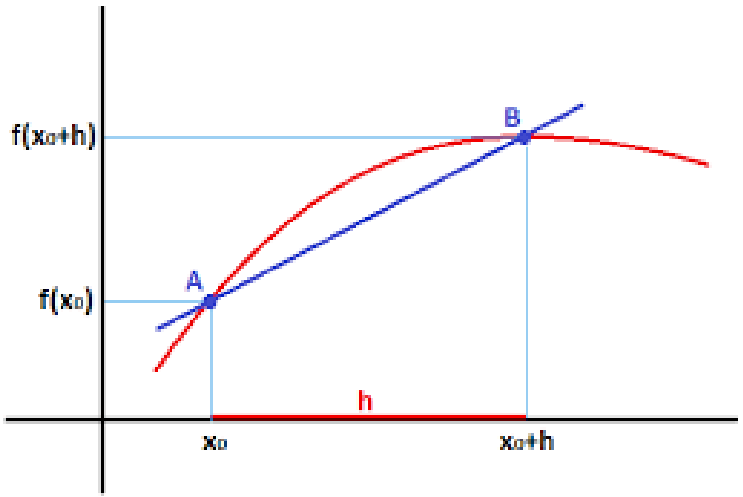
1. $2+3-7=$
2. $-2+1-9+3=$
3. $\frac{1}{2}+1-5=$
4. $\frac{4}{7}-5+\frac{2}{3}=$
5. $\frac{3}{5}*\frac{1}{4}=$
6. $\frac{2}{5}\div\frac{3}{8}=$

Para aprender más

La derivada de una función en cualquier punto de la gráfica es igual a la pendiente (m)

La derivada de una función f(x) representada como f´(x) es el límite del cociente del incremento de la función entre el incremento de la variable independiente cuando esta tiende a cero.

Interpretación geométrica de la derivada.



$$m_l = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$m_l = pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ de\ la\ función\ f(x)\ en\ el\ punto\ A$

$$y = mx + b$$

Ejercicios resueltos

Métodos de derivación. Regla general de la derivación.

Existen dos métodos aplicables de derivación. El primer método para la derivación es la regla general de la derivación, también conocida como regla de los cuatro pasos que son:

	Ejemplo 1. Función: $y = 4x$	
1.	Incrementar el valor de la variable independiente x por $x + \Delta x$, y por $y + \Delta y$. NOTA: Δx se lee delta de x; corresponde al incremento que tiene con respecto a x. Sugerencia: Los incrementos encerrarlos entre paréntesis para evitar confusión de operaciones.	$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)$ $y + \Delta y = 4x + 4(\Delta x)$
2.	Restar la función original a la función incrementada.	$y + \Delta y - y = 4x + 4(\Delta x) - 4x$ $\Delta y = 4(\Delta x)$
3.	Dividir el resultado anterior (todo) entre (Δx), factorizando de ser necesario.	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(\Delta x)}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$
4.	Calcular el límite de la función anterior cuando (Δx) tiende a 0.	$\lim_{\Delta x \to 0} 4 = 4$
	La derivada de $y = 4x$ es igual a $y' = 4$, resultado que también puede expresarse como $f(x) = 4x$ es igual a $f'(x) = 4$.	

	Ejemplo 2. Función: $y = x^2 + 6x + 9$	
1.	Incrementar el valor de la variable independiente x por $x + \Delta x$, y por $y + \Delta y$. Desarrolle en caso necesario. NOTA: Δx se lee delta de x; corresponde al incremento que tiene con respecto a x. Sugerencia: Los incrementos encerrarlos entre paréntesis para evitar confusión de operaciones.	$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x) + 9$ $y + \Delta y = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 6x + 6(\Delta x) + 9$
2.	Restar la función original a la función incrementada.	$y + \Delta y - y = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 6x + 6(\Delta x) + 9 - x^2 - 6x - 9$ $(\Delta y) = 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 6(\Delta x)$
3.	Dividir el resultado anterior (todo) entre (Δx), factorizando de ser necesario.	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 6(\Delta x)$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x(\Delta x)}{(\Delta x)} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)} + \frac{6(\Delta x)}{(\Delta x)}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + (\Delta x) + 6$
4.	Calcular el límite de la función anterior cuando (Δx) tiende a 0.	$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + (\Delta x) + 6 =$ $2x + (0) + 6 =$ $2x + 6$
	La derivada de $y = x^2 + 6x + 9$ es igual a $y' = 2x + 6$, resultado que también puede expresarse como $f(x) = x^2 + 6x + 9$ es igual a $f'(x) = 2x + 6$.	

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Determine las siguientes derivadas utilizando la regla general de la derivación.

N°	FUNCIÓN DERIVABLE	RESULTADO
1.	$y = 5x^2$	
2.	$y = 7 + 3x$	
3.	$y = \frac{2}{x^2}$	
4.	$y = \sqrt{x}$	
5.	$y = 3x - \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$	

Para aprender más

Métodos de derivación. Derivadas con fórmulas

En cálculo diferencial, la derivada es el cambio instantáneo con el que varía una función algebraica respecto a su variable independiente.

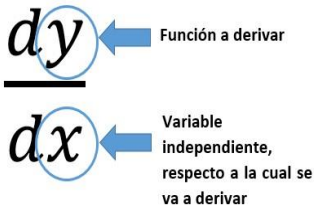
Gracias al desarrollo de las matemáticas es que podemos decir adiós a la regla de los cuatro pasos, porque aprenderemos técnicas y herramientas para derivar funciones algebraicas y trascendentes a las cuales llamaremos reglas de derivación.

Una derivada puede ser representada de cualquiera de las siguientes formas, nombradas a partir de sus creadores:

Notación		
Lagrange	Leibniz	Newton
$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	y'

Nota: en este curso utilizaremos la notación de Leibniz.

Los elementos de la derivada en la notación de Leibniz se expresan como un cociente, donde el numerador establece cuál es la función a derivar, y el denominador muestra la variable independiente con respecto a la cual se va a derivar la función.



Reglas para derivar funciones.

A partir del siguiente formulario, se explican las derivadas básicas.

DERIVADAS E INTEGRALES

Reglas básicas de derivación

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)u'$
12. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)u'$
13. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[ctgu] = -(\cos ec^2 u)$
15. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \cdot tgu)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\cos ecu] = -(\cos ecu \cdot ctgu)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
18. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$
20. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{-u'}{1+u^2}$
21. $\frac{d}{dx}[arc\sec u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
22. $\frac{d}{dx}[\arccos ecu] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Formulario recuperado de:

https://machsal.wixsite.com/asesoriadecalculo/diapositivas?lightbox=image_ocx

Rescatando mi Aprendizaje

Algunas fórmulas implican el uso correcto de los exponentes, por ello, se incluye la siguiente tabla:

LEYES DE LOS EXPONENTES

	Ley	Ejemplo
1.-	$x^1 = x$	$6^1 = 6$
2.-	$x^0 = 1$	$7^0 = 1$
3.-	$x^{-1} = 1/x$	$4^{-1} = 1/4$
4.-	$x^m x^n = x^{m+n}$	$x^2x^3 = x^{2+3} = x^5$
5.-	$x^m/x^n = x^{m-n}$	$x^4/x^2 = x^{4-2} = x^2$
6.-	$(x^m)^n = x^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6$
7.-	$(xy)^n = x^n y^n$	$(xy)^3 = x^3y^3$
8.-	$(x/y)^n = x^n/y^n$	$(x/y)^2 = x^2 / y^2$
9.-	$x^{-n} = 1/x^n$	$x^{-3} = 1/x^3$

Formulario recuperado de: https://brainly.lat/tarea/28374753

Ejercicios resueltos

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos de aplicación de las reglas de derivación básicas.

Derivada de una constante.	$\frac{d}{dx}c = 0$	Si y=5, entonces: $\frac{d}{dx}5 = 0$
Derivada identidad.	$\frac{d}{dx}x = 1$	Si y=x, entonces: $\frac{d}{dx}c = 0$
Derivada identidad con una constante.	$\frac{d}{dx}cx = c$	Si y=3x, entonces: $\frac{d}{dx}3x = 3(1) = 3$
Derivada de una potencia (x^n)	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	Si y = x^2, n=2, entonces: $\frac{d}{dx}x^2 = (2)x^{(2)-1} = 2x^1 = 2x$
Derivada de una constante multiplicando a una potencia (cx^n)	$\frac{d}{dx}cx^n = cnx^{n-1}$	Si y = $4x^3$, n=3, c=4, entonces: $\frac{d}{dx}4x^3 = (4)(3)x^{(3)-1} = 12x^2$
Derivada de una función irracional (raíz)	Expresar la raíz como exponente fraccionario -ver leyes de los exponentes-	Si y = $\sqrt[3]{x^5}$, expresar como $y = x^{\frac{5}{3}}$; aplicar la fórmula de derivación de una potencia. $\frac{d}{dx}x^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}$ Expresar el exponente -1 como fracción. $= \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{x^3}$

Rescatando mi Aprendizaje

Instrucciones Resuelve las siguientes derivadas en tu cuaderno empleando las fórmulas básicas de derivación.

N°	FUNCIÓN PARA DERIVAR	RESPUESTA
1.	$\frac{d}{dx}\frac{3}{5} =$	
2.	$\frac{d}{dx}8 =$	
3.	$\frac{d}{dx} = -7$	
4.	$\frac{d}{dx}4x =$	
5.	$\frac{d}{dx} - 13x =$	
6.	$\frac{d}{dx}\frac{5}{x^2} =$	
7.	$\frac{d}{dx}\frac{x}{8} =$	
8.	$\frac{d}{dx}5x^2 =$	
9.	$\frac{d}{dx}9x^4 =$	
10.	$\frac{d}{dx}\frac{5}{2x^3} =$	
11.	$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} =$	
12.	$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{x^2} =$	
13.	$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{x}}{6} =$	
14.	$\frac{d}{dx}\frac{2}{3\sqrt{x}} =$	
15.	$\frac{d}{dx}9\sqrt{x^5}$	
16.	$\frac{d}{dx} - 4\sqrt{x^3}$	

Ejercicios resueltos

A continuación, se revisaremos otros ejemplos de aplicación de los principios de derivación.

<table>
<tr>
<td>Principio de la suma/resta.</td>
<td>$\frac{d}{dx}[u+v-w]$
$=\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dx}v-\frac{d}{dx}w$</td>
<td>Si tiene $y=3-5x+3x^2$
$\frac{d}{dx}(3-5x+3x^2)$
$=\frac{d}{dx}3-\frac{d}{dx}5x+\frac{d}{dx}3x^2$
$=(0)-(5)+3(2)x^{2-1}$
$=-5+6x$</td>
</tr>
<tr>
<td>Principio de la multiplicación.</td>
<td>$\frac{d}{dx}u*v=u\frac{d}{dx}v+v\frac{d}{dx}u$</td>
<td>Si tiene $y=(3-5x)(2x^4)$
u
$=(3-5x)$
$u'=-5$
$v=2x^4$
$v'=8x^3$
$\frac{dy}{dx}(3-5x)(2x^4)$
$=(3-5x)(8x^3)+(2x^4)(-5)$
$=(24x^3-40x^4)-10x^4$
$=24x^3-50x^4$</td>
</tr>
<tr>
<td>Principio de la división.</td>
<td>$\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{v\frac{d}{dx}u-u\frac{d}{dx}v}{v^2}$</td>
<td>Si tiene $y=\frac{(3-5x)}{(2x^4+1)}$
$u=3-5x$
$u'=-5$
$v=2x^4+1$
$v'=8x^3$
$\frac{dy}{dx}\frac{(3-5x)}{(2x^4+1)}$
$=\frac{(2x^4+1)(-5)-(3-5x)(8x^3)}{(2x^4+1)^2}$</td>
</tr>
</table>

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Resuelve las siguientes derivadas en tu cuaderno empleando las fórmulas básicas y los principios de derivación.

N°	FUNCIÓN PARA DERIVAR	RESPUESTA
1.	$\frac{d}{dx}\frac{2}{5}+4x=$	
2.	$\frac{d}{dx}8x-4x^2+x^3=$	
3.	$\frac{d}{dx}=-7$	
4.	$\frac{d}{dx}\frac{3}{x}-2x=$	
5.	$\frac{d}{dx}8x^2-5x=$	
6.	$\frac{d}{dx}\frac{5}{x^2}+\frac{5}{x}-5x=$	
7.	$\frac{d}{dx}\frac{x}{8}+\frac{8}{x}=$	
8.	$\frac{d}{dx}x^7-x^6=$	
9.	$\frac{d}{dx}5x^4-3=$	
10.	$\frac{d}{dx}\frac{5}{2x^3}+\frac{3}{5x^2}=$	
11.	$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}-8\sqrt[5]{x}=$	
12.	$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=$	

13.	$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{2\sqrt{x^3}}{5}=$	
14.	$\frac{d}{dx}\ \frac{2}{3}-\sqrt{x}=$	
15.	$\frac{d}{dx}\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt{x^5}}-x^5+\frac{1}{x^5}$	
16.	$\frac{d}{dx}-4\sqrt{x^3}+6x^3-\frac{3}{x^5}$	
17.	$\frac{d}{dx}\ (x-2)(x+2)$	
18.	$\frac{d}{dx}\ (x-1)(x-4)$	
19.	$\frac{d}{dx}\ (x+9)(-3x^3)$	
20.	$\frac{d}{dx}\ (\mathrm{x}^2-5)(5-x)$	
21.	$\frac{d}{dx}\ (x+9x^3)(-3x^3+6x)$	
22.	$\frac{d}{dx}\ \frac{(x-2)}{(x+2)}$	
23.	$\frac{d}{dx}\ \frac{(x+5)}{(5-x)}$	
24.	$\frac{d}{dx}\ \frac{(x^3)}{(x-1)}$	
25.	$\frac{d}{dx}\ \frac{(-3x^3)}{(x+9)}$	

Para aprender más

A continuación, se revisaremos otros ejemplos de aplicación de la regla de la cadena. Para calcular la derivada de una función compuesta se aplica la regla de la cadena que se basa en el siguiente teorema:

Sean ***f*** y ***g*** dos funciones tales que ***f*** es diferenciable en ***g(x)*** y ***g*** es diferenciable en ***x***, entonces ***h = (f ◦ g)*** es diferenciable en ***x***:

$$h'(x) = f'[(g(x)].[g'(x)]$$

Una forma más sencilla de visualizar la regla de la cadena es ver las funciones como una ***función externa f*** que contiene a otra, a la cual se nombra ***función interna u***. El resultado es la derivada de la función externa evaluada en la interna por la derivada interna.[1]

$$\frac{d}{dx} f(u) = (f'(u)).(u')$$

En este principio de cambio de variable las fórmulas y principios básicos de derivación se siguen aplicando con los mismos criterios, solo que se hace un cambio de variable las fórmulas básicas:

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx} cu^n = cnu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1.

Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}(3x-1)^5$	Si tienen los datos: $u = 3x - 1$ $u' = 3$ $n = 5$
	Sustituye de acuerdo con la fórmula:	$\frac{d}{dx}(3x-1)^5 = (5)(3x-1)^{5-1}(3)$
	Y simplifica:	$= 15(3x-1)^4$

Ejemplo 2.

Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}\sqrt{(x-1)^5}$	
	Para resolver puede expresarse como: $\frac{d}{dx}(x-1)^{\frac{5}{2}}$	Si tienen los datos: $u = x - 1$ $u' = 1$ $n = \frac{5}{2}$
	Sustituye de acuerdo con la fórmula:	$\frac{d}{dx}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}(x-1)^{\frac{5}{2}-1}(1)$
	Nota: Recuerda que, para hacer la resta en exponentes, la unidad debe expresarse como fracción.	$\frac{d}{dx}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}(x-1)^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}}$
	Y simplifica:	$= \frac{5}{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Resuelve las siguientes derivadas en tu cuaderno empleando las fórmulas básicas con la regla de la cadena.

N°	FUNCIÓN PARA DERIVAR	RESPUESTA
1.	$\frac{d}{dx}(x+6)^5 =$	
2.	$\frac{d}{dx}(3x+9)^2 =$	
3.	$\frac{d}{dx}(8x-5)^7 =$	
4.	$\frac{d}{dx}(2x-8)^4 =$	
5.	$\frac{d}{dx}\sqrt[2]{10-2x}$	
6.	$\frac{d}{dx}\sqrt[2]{3x-6}$	
7.	$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(2x-7)^6}$	
8.	$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(x+5)^2}$	
9.	$\frac{d}{dx}(3x^2+9x)^4 =$	
10.	$\frac{d}{dx}(3x^2-x^3)^4 =$	
11.	$\frac{d}{dx}(x^3+8x)^6 =$	
12.	$\frac{d}{dx}(4x^5+9x^3)^2 =$	
13.	$\frac{d}{dx}\frac{1}{(3x+9)^2}$	
14.	$\frac{d}{dx}\frac{x}{(5x+3)^6}$	
15.	$\frac{d}{dx}\frac{4\sqrt{x}}{(5x\pm 2)^3}$	

Para aprender más

Derivación de funciones trascendentes.

Recuerda que hay tres tipos de funciones trascendentes: logarítmicas, trigonométricas y exponenciales, para derivar estas funciones se necesita utilizar formulas establecidas para este tipo de funciones, las cuales se muestran algunas a continuación:

Ejercicios resueltos

Fórmula de la función:	Derivada de la función:	
$\frac{dy}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	1.	$\frac{dy}{dx}5\ln x = (5)\frac{1}{x} = \frac{5}{x}$
	2.	$\frac{dy}{dx}\frac{4}{3}\ln x = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{x} = \frac{4}{3x}$
$\frac{dy}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}$	1.	$\frac{dy}{dx}8\log_a x = \frac{8\log_a e}{x}$
	2.	$\frac{dy}{dx}\frac{1}{5}\log_a x = \frac{\log_a e}{5x}$
$\frac{dy}{dx}\ e^x = e^x$	1.	$\frac{dy}{dx}\ 7e^x = 7e^x$
	2.	$\frac{dy}{dx}\ 10e^x = 10e^x$
$\frac{dy}{dx}\ a^x = a^x \ln a$	1.	$\frac{dy}{dx}\ 5^x = 5^x \ln 5$
	2.	$\frac{dy}{dx}\ 3^x = 3^x \ln 3$
$\frac{dy}{dx}\ senx = cosx$	1.	$\frac{dy}{dx}\ sen\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$
	2.	$\frac{dy}{dx}sen(x^2-2)$ En este caso se aplica la ley de la cadena: $\frac{dy}{dx}sen(x^2-2) = 2x\cos(x^2-2)$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Es momento de poner en práctica lo aprendido. Obtenga Las siguientes derivadas de funciones trascendentes.

N°	FUNCIÓN PARA DERIVAR	RESPUESTA
1.	$\frac{d}{dx}\ sen(5x)\ =$	
2.	$\frac{d}{dx}\ 5\cos(x+6)\ =$	
3.	$\frac{d}{dx}\ln(x+9)=$	
4.	$\frac{d}{dx}(3\mathrm{x}\ +\ 5e^{x})=$	
5.	$\frac{d}{dx}(x^{2}\ +\ 3e^{x})=$	
6.	$\frac{d}{dx}\ sen(2x+2)\ =$	
7.	$\frac{d}{dx}\ln(6x^{3}-3x)=$	
8.	$\frac{d}{dx}\tan(\ x^{2}+1)=$	
9.	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen}\ (4x^{2}+\mathrm{x})=$	
10.	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,csc}\ (5\mathrm{x})=$	
11.	$\frac{d}{dx}\ln(3x^{2}-9x)=$	
12.	$\frac{d}{dx}\cos\ (x^{4})=$	
13.	$\frac{d}{dx}\cot\ (x^{3})=$	
14.	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec}\ (x^{2}+1)=$	
15.	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos}\ (3x-4)=$	

Para aprender más

Derivadas sucesivas.

Si una función *y* es derivable obteniendo $\frac{dy}{dx}$ si es derivable, entonces podemos calcular la derivada a dicha función y de esta forma obtenemos la segunda derivada de la función y se representa como $\frac{d^2y}{d^2x}$.

Si seguimos aplicando la misma lógica, entonces $\frac{d^2y}{d^2x}$ es derivable y se obtiene la tercera derivada de y, a la que representaremos como $\frac{d^3y}{d^3x}$, y así sucesivamente con $\frac{d^4y}{d^4x}, \frac{d^5y}{d^5x}, \frac{d^ny}{d^nx}$.

	Función	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{d^2x}$	$\frac{d^3y}{d^3x}$
a)	$y = x^3$	$y' = 3x^2$	$y'' = 6x$	$y''' = 6$
b)	$y = 3x^5 + 7x^2$	$y' = 15x^4 + 14x$	$y = 60x^3 + 14$	$y = 180x^2$
c)	$y = \sqrt{x^3}$	$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$	$y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$	$y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^3}}$
d)	$y = e^{2x}$	$y' = 2e^{2x}$	$y' = 4e^{2x}$	$y' = 8e^{2x}$

Los ejercicios anteriores fueron muy sencillos porque solo se usaron derivadas de funciones algebraicas o trascendentales por separado, pero también se pueden utilizar derivadas algebraicas y trascendentales en un mismo ejercicio como en el ejercicio que sigue a continuación:

Ejercicios resueltos

a)	Función	$y = sen\ 8x^3$	
	$\frac{dy}{dx}$	Para obtener la primera derivada utilizamos la fórmula de la derivada de la función seno:	$y' = 24\ cos8x^3$
	$\frac{d^2y}{d^2x}$	Para obtener la segunda derivada se utilizan dos fórmulas: La fórmula de la derivada algebraica de la multiplicación y la de la función seno:	$y'' = (24x^2)(-24\ x^2\ sen\ 8x^3) + (\ cos8x^3)(48x)$ $= -576x^4\ sen\ 8x^2 + 48x\ cos8x^3$ Factorizando se obtiene: $= 48x(-12x^3 sen\ 8x^3 + \cos 8x^3)$
b)	Función:	$y = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{10}{7}} + x^{\frac{25}{6}}$	
	$\frac{dy}{dx}$	Aplica las fórmulas que corresponden a la función x elevada a la n.	$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{10}{7}} + x^{\frac{25}{6}}\right)$ $= \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - \frac{10}{7}x^{\frac{10}{7}-1} + \frac{25}{6}x^{\frac{25}{6}-1}$ $= \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} - \frac{10}{7}x^{\frac{10}{7}-\frac{7}{7}} + \frac{25}{6}x^{\frac{25}{6}-\frac{6}{6}}$ $= \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{7}x^{\frac{3}{7}} + \frac{25}{6}x^{\frac{19}{6}}$
	$\frac{d^2y}{d^2x}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{7}x^{\frac{3}{7}} + \frac{25}{6}x^{\frac{19}{6}}\right)$	

		$= \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} - \left(\frac{10}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)x^{\frac{3}{7}-1} + \left(\frac{25}{6}\right)\left(\frac{19}{6}\right)x^{\frac{19}{6}-1}$ $= \frac{10}{9}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} - \left(\frac{30}{49}\right)x^{\frac{3}{7}-\frac{7}{7}} + \left(\frac{475}{36}\right)x^{\frac{19}{6}-\frac{6}{6}}$ $= \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{30}{49}\right)x^{-\frac{4}{7}} + \left(\frac{475}{36}\right)x^{\frac{13}{6}}$
	$\frac{d^3y}{d^3x}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{30}{49}\right)x^{-\frac{4}{7}} + \left(\frac{475}{36}\right)x^{\frac{13}{6}}\right)$ $= \left(\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} - \left(\frac{30}{49}\right)\left(-\frac{4}{7}\right)x^{-\frac{4}{7}-1} + \left(\frac{475}{36}\right)\left(\frac{13}{6}\right)x^{\frac{13}{6}-1}$ $= -\frac{10}{27}x^{-\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} - \left(\frac{120}{343}\right)x^{-\frac{4}{7}-\frac{7}{7}} + \left(\frac{6125}{216}\right)x^{\frac{13}{6}-\frac{6}{6}}$ $= -\frac{10}{27}x^{-\frac{4}{3}} - \left(\frac{120}{343}\right)x^{-\frac{11}{7}} + \left(\frac{6125}{216}\right)x^{\frac{1}{6}}$ $= -\frac{10}{27\sqrt[3]{x^4}} - \frac{120}{343\sqrt[7]{x^{11}}} + \frac{6125}{216}\sqrt[6]{x}$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Calculas las derivadas sucesivas de las siguientes funciones:

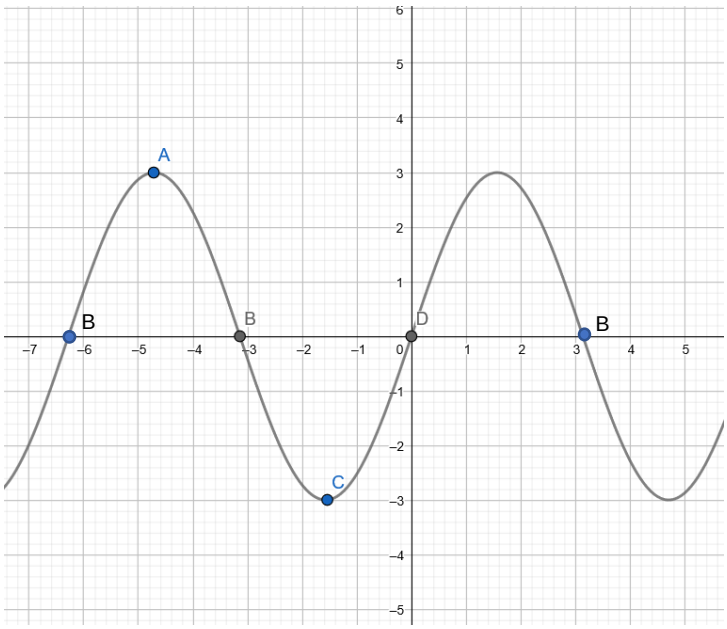
	Función	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{d^2x}$	$\frac{d^3y}{d^3x}$
1.	$y = 2x^6$			
2.	$y = 4x^3 + e^x$			
3.	$y = \frac{1}{2}x^4 - 8x^7$			
4.	$y = \sqrt[4]{x^3}$			
5.	$y = \cos x$			
6.	$y = \ln x$			
7.	$y = 2x^5 + 3x^3 + 9$			
8.	$y = 6 - x^5 - 7x^2$			
9.	$y = \cos(2x)$			
10.	$y = (3x^3 + 1)^5$			
11.	$y = (2x^4 - 6x)^3$			
12.	$y = \sqrt{x}$			
13.	$y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 11$			
14.	$y = sen\ x$			
15.	$y = (x + 1)(5x)$			

Para aprender más

Aplicaciones de la derivada. Cálculo de valores máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera derivada.

Una función $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto $x = x_o$, cuando $f(x_0)$ es mayor o menor que los valores de la función para los puntos inmediatamente anteriores y posteriores al considerado.

Función f(s) = sen x



A. Punto máximo absoluto.

B. Raíces.

C. Punto mínimo absoluto.

D. Intersección con el eje y.

Para determinar los máximos y mínimos relativos de una función *f(x)* continua se utiliza el criterio de la primera derivada.

Criterio de la primera derivada

Para el caso de los máximos y mínimos relativos de una función, los podremos hallar siguiendo los criterios de la primera derivada o la segunda derivada.

Los máximos y mínimos relativos de una función se localizan en los puntos de tangencia horizontal, es decir en los puntos en los cuales la primera derivada de la función se anula, es decir, es igual a cero. por lo tanto: igualando a cero la primera derivada se obtiene una ecuación cuyas soluciones contienen a los valores críticos. $f'(x) = 0$

De acuerdo con las características de las funciones crecientes y decrecientes:

A) Antes de un mínimo la función es decreciente y después de él, la función es creciente, de lo que se deduce qué si la función cambia de negativa a positiva, tendremos un mínimo.

B) Antes de un máximo la función es creciente y después de él, la función es decreciente, de lo que se deduce qué si la función cambia de positiva a negativa, tendremos un máximo.

El procedimiento para calcular los máximos y mínimos relativos de una función, usando el criterio de la primera derivada, es el siguiente:

1. Se saca la primera derivada de la función.
2. Esta primera derivada se iguala a cero.
3. La ecuación igualada a cero se resuelve para x (generalmente por factorización). Los valores de x que satisfagan a la ecuación recibirán el nombre de valores críticos y es en ellos donde probablemente se localizaran los máximos y mínimos de la función.
4. Una vez localizados los valores críticos, se realiza una pequeña recta numérica, la cual nos servirá para escoger los valores, vamos a utilizar para

evaluar cada valor crítico. Vamos a tomar un valor cualquiera anterior y uno posterior al valor crítico (de preferencia enteros) siempre y cuando estos valores no rebasen a otro valor crítico.

5. Una vez definidos los valores que servirán para evaluar a los puntos críticos, estos valores se sustituirán en la ecuación de la primera derivada (de preferencia en la ecuación factorizada), y de acuerdo con los signos obtenidos, se aplican los siguientes criterios:

    a) Si la función cambia de positiva a negativa, entonces tendremos un máximo relativo en ese valor crítico.

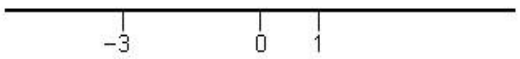
    b) Si la función cambia de negativa a positiva, entonces tendremos un mínimo relativo en ese valor crítico.

    c) Si la función no presenta un cambio de signo, es decir que vaya de negativa a negativa o de positiva a positiva, entonces en ese valor critico no tendremos ni máximo ni mínimo.

6. Hasta este instante, ya sabemos en qué puntos se localizan los máximos y mínimos de la función, pero no sabemos todavía cuál es el valor de cada uno, para hallar el valor, tanto del máximo como del mínimo, tenemos que sustituir los valores críticos en la ecuación original, es decir, en la ecuación que teníamos al principio antes de hacer la derivación.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1. Hallar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones, aplicando el método de la primera derivada: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

Obtenga la derivada de la función:	$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
Iguala la primera derivada a cero y factoriza para hallar los valores críticos:	$3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$
De acuerdo con la factorización, los valores críticos son:	$x_1 = -3$ $x_2 = 1$
Ubica los valores críticos en el eje de las abscisas:	
Evaluando el valor critico $x_1 = -3$ Los valores que tomaremos para hacer la evaluación de este valor crítico serán (-4) y (-2):	Evalúa con el valor anterior: $x_1 = -4$ $3[(-4) + 3][(-4) - 1] = 3(-1)(-5)$ Al hacer esta sustitución en el primer paréntesis nos da –1 y en segundo nos da –5, de estos resultados lo único que nos interesa es el signo de cada resultado, ya que estos signos son los que vamos a multiplicar para ver cómo es la función antes del valor crítico, si negativa o positiva. Evalúa con el valor posterior $x_1 = -2$ $3[(-2) + 3][(-2) - 1] = 3(1)(-3)$

Si $x = -4 \Rightarrow (-)(-) = +$
Si $x = -2 \Rightarrow (+)(-) = -$

LA FUNCION VA DE POSITIVA A NEGATIVA, POR LO QUE EN $x = -3$ TENEMOS UN MAXIMO RELATIVO.

Evaluando el valor critico $x_1 = 1$ Los valores que tomaremos para hacer la evaluación de este valor crítico serán (-2) y (2):	Evalúa con el valor anterior: $x_1 = -2$ $3[(-2)+3][(-2)-1] = 3(1)(-3)$ Evalúa con el valor posterior $x_1 = 2$ $3[(2)+3][(2)-1] = 3(5)(1)$

Si $x = -2 \Rightarrow (+)(-) = -$
Si $x = 2 \Rightarrow (+)(+) = +$

LA FUNCION VA DE NEGATIVA A POSITIVA, POR LO QUE EN $x = 1$ TENEMOS UN MINIMO RELATIVO.

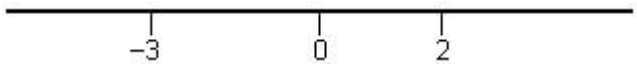
Sustituye los valores críticos en la función inicial $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ para hallar el valor máximo y mínimo relativo.	Sustituye $x = -3$ en $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3 =$ $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 3$ $-27 + 27 + 27 + 3 = 30$ Sustituye $x = 1$ en $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3 =$ $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 3$ $= 1 + 3 - 9 + 3 = -2$

SOLUCIÓN:

Para $x = -3$, el máximo $= 30$; y se escribe como par ordenado: $máx = (-3,30)$

Para $x = 1$, el mínimo $= -2$; y se escribe como par ordenado: $máx = (1,-2)$

Ejemplo 2. Hallar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones, aplicando el método de la primera derivada: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

Obtenga la derivada de la función:	$f'(x) = x^2 + x - 6$
Iguala la primera derivada a cero y factoriza para hallar los valores críticos:	$(x^2 + x - 6) = (x + 3)(x - 2)$
De acuerdo con la factorización, los valores críticos son:	$x_1 = -3$ $x_2 = 2$
Ubica los valores críticos en el eje de las abscisas:	
Evaluando el valor critico $x_1 = -3$ Los valores que tomaremos para hacer la evaluación de este valor crítico serán (-2) y (-2):	Evalúa con el valor anterior: $x_1 = -4$ $[(-4) + 3][(-4) - 2] = (-1)(-6)$ Al hacer esta sustitución en el primer paréntesis nos da –1 y en segundo nos da –6, de estos resultados lo único que nos interesa es el signo de cada resultado, ya que estos signos son los que vamos a multiplicar para ver cómo es la función antes del valor crítico, si negativa o positiva. Evalúa con el valor posterior $x_1 = -2$ $[(-2) + 3][(-2) - 2] = (1)(-4)$
SI x = –4 ⇒ (–) (–) = + SI x = –2 ⇒ (+) (–) = – LA FUNCION VA DE POSITIVA A NEGATIVA, POR LO QUE EN x = –3 TENEMOS UN MAXIMO RELATIVO.	
Evaluando el valor critico $x_1 = 2$ Los valores que tomaremos para hacer la evaluación de este valor crítico serán (-2) y (3):	Evalúa con el valor anterior: $x_1 = -2$ $[(-2) + 3][(-2) - 2] = (1)(-4)$ Evalúa con el valor posterior $x_1 = 3$ $[(3) + 3][(3) - 2] = (6)(1)$

SI $x = -2 \Rightarrow (+)(-) = -$
SI $x = 3 \Rightarrow (+)(+) = +$

LA FUNCION VA DE NEGATIVA A POSITIVA, POR LO QUE EN $x = 2$ TENEMOS UN MINIMO RELATIVO.

Sustituye los valores críticos en la función inicial
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$
para hallar el valor máximo y mínimo relativo.

Sustituye $x = -3$ en

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$$
$$= \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 8$$
$$= \frac{1}{3}(-27) + \frac{1}{2}(9) + 18 + 8$$
$$= -\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18 = -9 + 4\frac{1}{2} + 18 + 8$$
$$= 21.5 = \frac{43}{2}$$

Sustituye $x = 2$ en

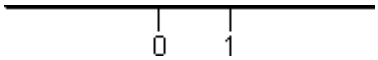
$$f(x) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 8$$
$$= \frac{1}{3}(8) + (2) - 12 + 8$$
$$= \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8$$
$$= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN:

Para $x = -3$, el máximo $= \frac{43}{2}$; y se escribe como par ordenado: $máx = (-3, \frac{43}{2})$

Para $x = 1$, el mínimo $= -2$; y se escribe como par ordenado: $máx = (2, \frac{2}{3})$

Ejemplo 3. Hallar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones, aplicando el método de la primera derivada: $f(x) = 6x^4 - 8x^3$

Obtenga la derivada de la función:	$f'^{(x)} = 24x^3 - 24x^2$
Iguala la primera derivada a cero y factoriza para hallar los valores críticos:	$(24x^3 - 24x^2) = 24x^2(x-1)$
De acuerdo con la factorización, los valores críticos son:	$x_1 = 1$ $x_2 = 0$
Ubica los valores críticos en el eje de las abscisas:	
Evaluando el valor critico $x_1 = 1$ Los valores que tomaremos para hacer la evaluación de este valor crítico serán ($\frac{1}{2}$) y (2):	Evalúa con el valor anterior: $x_1 = \frac{1}{2}$ $24\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)-1\right) = 12\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$ Evalúa con el valor posterior $x_1 = 2$ $24(2)^2((2)-1) = 12(2) = -6$
SI x = –4 ⇒ (–) (–) = + SI x = –2 ⇒ (+) (–) = – LA FUNCION VA DE POSITIVA A NEGATIVA, POR LO QUE EN x = –3 TENEMOS UN MAXIMO RELATIVO.	
Evaluando el valor critico $x_1 = 2$ Los valores que tomaremos para hacer la evaluación de este valor crítico serán (-2) y (3):	Evalúa con el valor anterior: $x_1 = -2$ $[(-2)+3][(-2)-2] = (1)(-4)$ Evalúa con el valor posterior $x_1 = 3$ $[(3)+3][(3)-2] = (6)(1)$

SI $x = -2 \Rightarrow (+)(-) = -$
SI $x = 3 \Rightarrow (+)(+) = +$
LA FUNCION VA DE NEGATIVA A POSITIVA, POR LO QUE EN $x = 2$ TENEMOS UN MINIMO RELATIVO.

Sustituye los valores críticos en la función inicial

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

para hallar el valor máximo y mínimo relativo.

Sustituye $x = -3$ en

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$$

$$= \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 8$$

$$= \frac{1}{3}(-27) + \frac{1}{2}(9) + 18 + 8$$

$$= -\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18 = -9 + 4\frac{1}{2} + 18 + 8$$

$$= 21.5 = \frac{43}{2}$$

Sustituye $x = 2$ en

$$f(x) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 8$$

$$= \frac{1}{3}(8) + (2) - 12 + 8$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8$$

$$= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

SOLUCIÓN:

Para $x = -3$, el máximo $= \frac{43}{2}$; y se escribe como par ordenado: $máx = (-3, \frac{43}{2})$

Para $x = 1$, el mínimo $= -2$; y se escribe como par ordenado: $máx = (2, \frac{2}{3})$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Hallar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones, aplicando el método de la primera derivada:

N°.	FUNCIÓN	SOLUCIÓN
4.	$y = x^2 + 10x + 25$	
5.	$y = x^2 - 36$	
6.	$y = x^2 - 7x - 10$	
7.	$y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x + 10$	
8.	$y = x^4 + 3x^2 + 2x$	

Para aprender más

Criterios de la segunda derivada

Como se mencionó en el subtema anterior, los máximos y mínimos relativos de una función pueden obtenerse aplicando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada. En este subtema se observará cómo se obtienen los máximos y mínimos relativos de una función aplicando el criterio de la segunda derivada.

De acuerdo con la concavidad de una curva, el máximo relativo se encuentra en algún punto de la curva en donde esta es convexa. Por el contrario, para el punto donde se localiza el mínimo relativo, la curva es cóncava de acuerdo con los criterios y propiedades de la concavidad, se establece la siguiente propiedad:

Sea *f* una función tal que su primera y segunda derivada existan en $x = c$. para la curva de *f*:

a. Existe un máximo relativo en $x = c$, si: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$

b. Existe un máximo relativo en $x = c$, si: $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$

El procedimiento para hallar los máximos y mínimos relativos de una función, aplicando el criterio de la segunda derivada, es el siguiente:

a. Se saca la primera derivada de la función.

b. Esta primera derivada se iguala a cero.

c. La ecuación igualada a cero se resuelve para *x* (generalmente por factorización). Los valores de *x* que satisfagan a la ecuación recibirán el nombre de valores críticos y es en ellos donde probablemente se localizaran los máximos y mínimos de la función

d. Una vez localizados los valores críticos, se saca la segunda derivada de la función.

e. Ya que tenemos la segunda derivada de la función, en ella vamos a sustituir los valores críticos que encontramos. del resultado de la sustitución, lo único que nos va a interesar es el signo de la cantidad y en base al signo, aplicaremos los siguientes criterios:

   I. Si el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada es menor que cero, es decir, es negativa, entonces en ese valor critico tendremos un máximo.

   II. Si el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada es mayor que cero, es decir, es positiva, entonces en ese valor critico tendremos un mínimo.

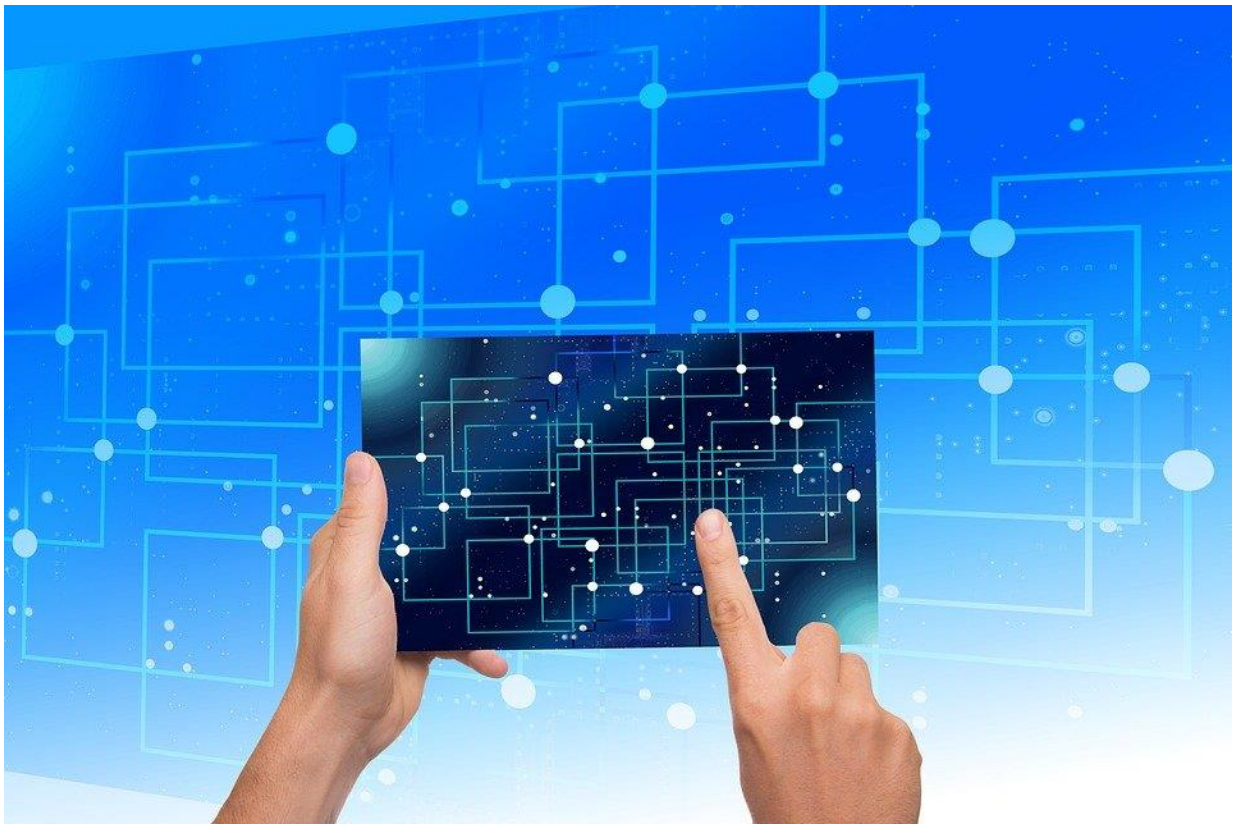
   III. Si el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada es igual a cero, entonces en ese valor critico no tendremos ni máximo ni mínimo.

f. Hasta este instante ya sabemos en qué puntos se localizan los máximos y mínimos de la función, pero no sabemos todavía cuál es el valor de cada uno. Para hallar el valor, tanto del máximo como del mínimo, tenemos que sustituir los valores críticos en la ecuación original, es decir, en la ecuación que teníamos al principio antes de hacer la derivación.

Si comparamos los dos métodos de máximos y mínimos relativos, veremos que la única diferencia está en la forma de cómo evaluar los valores críticos, para saber si en ellos hay un máximo, mínimo o si no hay ni máximo ni mínimo.

No importa que método usemos, debemos de obtener el mismo resultado en nuestros ejercicios, prueba de ello es que se volverán a resolver, por el criterio de la segunda derivada, los mismos ejercicios que se usaron para explicar el criterio de la primera derivada.

Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com junio 2021



Ejercicios resueltos

Instrucciones Hallar los máximos y los mínimos de las siguientes funciones, aplicando ahora el criterio de la segunda derivada.

Ejercicio 1.

FUNCIÓN:	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$
Obtiene la primera derivada:	$\frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 - 9x + 3)$ $= 3x^2 + 6x - 9$
Iguala la primera derivada a cero y factoriza para hallar los valores críticos:	$3x^2 + 6x - 9 = 0$ $3(x^2 + 2x - 3) = 0$ $3(x + 3)(x - 1) = 0$ Valores críticos: $x = -3$ $x = 1$
Hasta aquí, hemos hecho lo mismo que cuando usamos el criterio de la primera derivada, pero en lo que vamos a hacer ahora es donde son diferentes estos dos criterios.	
Obtiene la segunda derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$	$\frac{d}{dx}(3x^2 + 6x - 9) = 6x + 6$
Para evaluar los puntos críticos, se sustituyen en la ecuación de la segunda derivada obtenida:	Valor crítico: $x = -3$ $f''(-3) = 6(-3) + 6 = -18 + 6$ $= -12$ Como el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada nos da una cantidad

	negativa, entonces en $x = -3$, tendremos un máximo relativo.
	Valor crítico: $x = 1$ $f''(1) = 6(1) + 6 = 6 + 6 = 12$ Como el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada nos da una cantidad positiva, entonces en $x = 1$, tendremos un mínimo relativo.
Para hallar el valor del máximo y mínimo relativo, hacemos otra vez lo mismo que en el criterio de la primera derivada, sustituir los valores críticos en la función inicial.	
Sustituyendo los valores críticos en la función inicial $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$, hallamos el valor del máximo y del mínimo relativo.	Sustituyendo: $x = -3$ $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 3$ $= -9 + 9 + 27 + 3 = 30$ Para $x = -3$ se tiene un máximo de 30, o sea (-3,30). Sustituyendo: $x = 1$ $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 3$ $= 1 + 3 - 9 + 3 = -2$ Para $x = 1$ se tiene un mínimo de -2, expresado como par ordenado (1,-2).

Ejercicio 2.

FUNCIÓN:	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$
Obtiene la primera derivada:	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8\right)$ $=x^2+x-6$
Iguala la primera derivada a cero y factoriza para hallar los valores críticos:	$x^2+x-6=0$ $(x+3)(x-2)=0$ Valores críticos: $x=-3$ $x=2$
Hasta aquí, hemos hecho lo mismo que cuando usamos el criterio de la primera derivada, pero en lo que vamos a hacer ahora es donde son diferentes estos dos criterios.	
Obtiene la segunda derivada de la función $\mathrm{f(x)}=x^2+x-6$	$\frac{d}{dx}(x^2+x-6)=2x+1$
Para evaluar los puntos críticos, se sustituyen en la ecuación de la segunda derivada obtenida:	Valor crítico: $x=-3$ $\mathrm{f''}(-3)=2(-3)+1$ $=-6+1=-5$ Como el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada nos da una cantidad negativa, entonces en $x=-3$, tendremos un máximo relativo.
	Valor crítico: $x=2$ $\mathrm{f''}(2)=2(2)+1=5$

	Como el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada nos da una cantidad positiva, entonces en $x = 1$, tendremos un mínimo relativo.

Para hallar el valor del máximo y mínimo relativo, hacemos otra vez lo mismo que en el criterio de la primera derivada, sustituir los valores críticos en la función inicial.

Sustituyendo los valores críticos en la función inicial

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$,

hallamos el valor del máximo y del mínimo relativo.

Sustituyendo: $x = -3$

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) + 8$$

$$f(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 + 8$$

$$f(-3) = 17 + \frac{9}{2} = \frac{34}{2} + \frac{9}{2} = \frac{43}{2}$$

Para $x = -3$ se tiene un máximo de $\frac{43}{2}$, o sea 30). $\left(-3, \frac{43}{2}\right)$

Sustituyendo: $x = 2$

$$f(2) = \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} - 6(2) + 8$$

$$f(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8$$

$$f(2) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

Para $x = 2$ se tiene un mínimo de $\frac{2}{3}$, expresado como par ordenado $\left(2, \frac{2}{3}\right)$

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Hallar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones, aplicando el método de la segunda derivada:

N°.	FUNCIÓN	SOLUCIÓN
1.	$f(x) = 6x^4 - 8x^3$	
2.	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 36x + 1$	
3.	$f(x) = x^2 + 10x - 3$	
4.	$f(x) = x^4 \mp 3x^2 + 9$	
5.	$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x}{6}$	

Para aprender más

Funciones crecientes y decrecientes

Funciones crecientes y decrecientes

De acuerdo con su primera derivada una función es creciente, en un punto dado, si el valor de la primera derivad es positivo, y es decreciente si el valor de la misma primera derivada es negativo en ese punto dado.

Por ello el procedimiento para determinar los intervalos en que una función es creciente o decreciente es el siguiente (en los primeros pasos es muy parecido a la obtención de máximos):

1. Se saca la primera derivada de la función.

2. Esta primera derivada se iguala a cero.

3. La ecuación igualada a cero se resuelve para *x* (generalmente por factorización). tendremos así los valores críticos y a partir de ellos formaremos intervalos (esta es la parte parecida a la obtención de los máximos y mínimos).

4. Una vez localizados los valores críticos, formaremos intervalos de valores que estarán delimitados por los valores críticos. la cantidad de intervalos que se formen dependerá de la cantidad de valores críticos que tenga la función, por ejemplo, si tiene solo un punto crítico, formaremos dos intervalos, si tiene 2 puntos críticos formaremos 3 intervalos si tiene 3 puntos críticos formaremos 4 intervalos y así sucesivamente. otros ejemplos más prácticos son los siguientes:

   a. Si tenemos un solo valor crítico, por ejemplo, en x =2, formaremos dos intervalos, uno que ser el de los números menores de dos ($x < 2$) y el de los numero mayores de 2 ($x > 2$).

   b. Si tenemos dos valores críticos, por ejemplo, en $x = 2$ y en $x = 4$, formaremos tres intervalos, el primero lo formaran los números menores de dos ($x < 2$), el segundo lo formaran los numero que están comprendidos entre el 2 y el 4 ($2 < x < 4$) y el tercero lo formaran los numero mayores de 4 ($x > 4$).

5. Una vez formados los intervalos vamos a tomar al azar un numero de cada intervalo y los números seleccionados sustituimos en la ecuación de la primera derivada, para que de acuerdo al resultado apliquemos los siguientes criterios:

   a. Si el resultado de la sustitución del valor critico en la primera derivada es menor que cero, es decir, es negativa, entonces en ese intervalo la función es decreciente.

   b. Si el resultado de la sustitución del valor critico en la primera derivada es mayor que cero, es decir, es positiva, entonces en ese intervalo la función es creciente.

Ejercicios resueltos

1. Determina los intervalos en los cuales la función $f(x) = x^3 + 3x + 2$ es creciente y decreciente.

Empezamos por sacar la primera derivada de la función	$f'(x^3 + 3x + 2) = 3x^2 + 3$
Ahora igualamos la y' a cero y resolvemos la ecuación para hallar los valores críticos. En este caso particular no fue necesario factorizar, pero no se confíen, serán pocas las veces que no se factorice.	$3x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1$ $\Longrightarrow \sqrt{x^2} = 1 \Longrightarrow x \pm 1$
Como los valores críticos son $x = 1$ y $x = -1$, entonces los intervalos que formaremos son:	$x < -1;\ -1 < x; x > 1$
Seleccionemos ahora un valor de cada uno de los intervalos. Para $x < -1$, usaremos x = –2 Para $-1 < x < 1$, usaremos x = 0	Para x < –1, usaremos x = –2 $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3$ $f'(-2) = 3(4) - 3$ $f'(-2) = 12 - 3 = 9$

Para $x > 1$, usaremos x = 2	El resultado es positivo así que la función es creciente en el intervalo $x < -1$.
	Para $-1 < x < 1$, usaremos x = 0 $$f'(0) = 3(0)^2 - 3$$ $$f'(0) = 0 - 3 = -3$$ El resultado es negativo así que la función es decreciente en el intervalo $-1 < x < 1$.
	Para $x > 1$, usaremos x = 2 $$f'(2) = 3(2)^2 - 3$$ $$f'(2) = 3(4) - 3$$ $$f'(2) = 12 - 3 = 9$$ El resultado es positivo así que la función es creciente en el intervalo $x > 1$.

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Determina los intervalos en los cuales la función es creciente y decreciente:

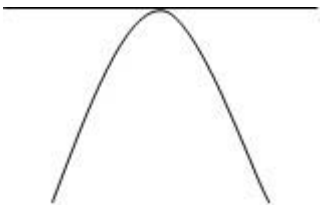
N°.	FUNCIÓN	SOLUCIÓN
1.	$f(x) = 2x^4 - 5x^3$	
2.	$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2$	
3.	$f(x) = x^2 + 10x - 3$	

Para aprender más

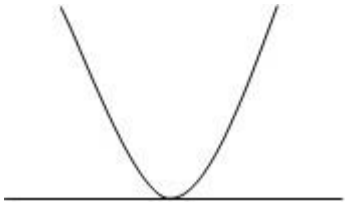
Concavidad y puntos de inflexión

Un arco de curva y = f(x) es cóncavo, si en cada uno de sus puntos está situado por encima de la tangente o si en algún intervalo determinado por los puntos de inflexión f''(x) > 0.

Un arco de curva y = f(x) es convexo, si en cada uno de sus puntos está situado por debajo de la tangente o si en algún intervalo determinado por los puntos de inflexión f''(x) < 0.



Concavidad convexa (máximo)



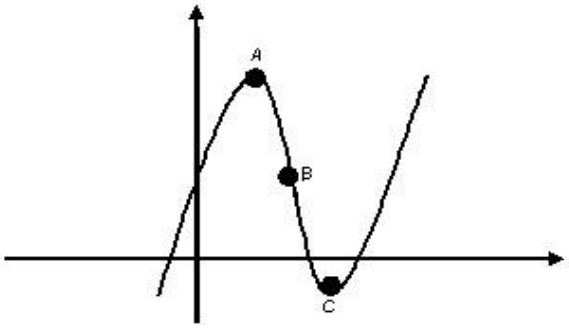
Concavidad cóncava (mínimo)

La concavidad es un punto en el cual la curva cambia de cóncava a convexa o viceversa. De acuerdo con la siguiente figura, los puntos a, b y c son puntos de inflexión.

Los puntos de inflexión nos van a servir para determinar los intervalos de concavidad de la curva axial, así como también los puntos o valores críticos que nos sirvieron para determinar los máximos y mínimos. Una curva tiene un punto de inflexión si en ese punto $f''(x) = 0$.

Para obtener el punto de inflexión de una curva a la función, se saca su segunda derivada y se iguala a cero, los valores de x que resuelvan a esta ecuación serán los valores críticos para los puntos de inflexión y si sustituimos estos valores críticos en la función inicial, hallaremos los puntos críticos de los puntos de inflexión.

En la siguiente grafica se señalan donde se encuentran los máximos y mínimos relativos y el punto de inflexión de una función cualquiera.



donde:

a = máximo relativo

b = punto de inflexión

c = mínimo relativo

El procedimiento para determinar los intervalos en que una función es creciente o decreciente es el siguiente (en los primeros pasos es muy parecido a la obtención de máximos):

a Se saca la primera y la segunda derivada de la función.

b La segunda derivada se iguala a cero.

c La ecuación igualada a cero se resuelve para *x* (generalmente por factorización). tendremos así los valores críticos y a partir de ellos formaremos intervalos (esta es la parte parecida a la obtención de los máximos y mínimos).

d Una vez localizados los valores críticos, formaremos intervalos de valores que estarán delimitados por los valores críticos. la cantidad de intervalos que se formen dependerá de la cantidad de valores críticos que tenga la función, por ejemplo, si tiene solo un punto crítico, formaremos dos intervalos, si tiene 2 puntos críticos formaremos 3 intervalos si tiene 3 puntos críticos formaremos 4 intervalos y así sucesivamente. otros ejemplos más prácticos son los siguientes:

Si tenemos un solo valor crítico, por ejemplo, en $x = 2$, formaremos dos intervalos, uno que ser el de los números menores de dos $x < 2$ y el de los numero mayores de 2 $x > 2$.

Si tenemos dos valores críticos, por ejemplo, en $x = 2$ y en $x = 4$, formaremos tres intervalos, el primero lo formaran los números menores de 2, $(x < 2)$, el segundo lo formaran los numero que están comprendidos entre el 2 y el 4 $(2 < x < 4)$ y el tercero lo formaran los numero mayores de 4, $(x > 4)$.

d) Una vez formados los intervalos, se toma un numero al azar de cada intervalo, y los números seleccionados se sustituyen en la ecuación de la segunda derivada, para que de acuerdo con el resultado se apliquen los siguientes criterios:

Si el resultado de la sustitución del valor critico en la segunda derivada es menor que cero, es decir, es negativa, entonces en ese intervalo la función es cóncava hacia abajo.

Si el resultado de la sustitución del valor critico en la primera derivada es mayor que cero, es decir, es positiva, entonces en ese intervalo la función es cóncava hacia arriba.

Para hallar el punto de inflexión se sustituye el valor en que la segunda derivada dio cero (valor critico) en la ecuación original, debemos de checar si en ese punto existe cambio de concavidad, si lo hay entonces tenemos un punto de inflexión.

Ejercicios resueltos

1. Calcula los intervalos en que la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Sacamos la primera y segunda derivada de la función.	$f'(2x^3 - 3x^2 + 6x - 1) = 6x^2 - 6x + 6$ $f''(6x^2 - 6x + 6) = 12x - 6$
Igualamos a cero esta ecuación y la resolvemos para hallar los valores críticos.	$12x - 6 = 0$ $12x - 6 = 0 \Longrightarrow 12x = 6 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$
Como solo tenemos un valor crítico, solo formamos dos intervalos:	$x < \frac{1}{2}$ y $x > \frac{1}{2}$
Para verificar el intervalo $x < \frac{1}{2}$, usaremos $x = 0$, y para verificar el intervalo $x > \frac{1}{2}$, usaremos $x = 2$.	Sustituyendo estos valores en la ecuación de la segunda derivada: $f(0) = 12(0) - 6 = -6$ El resultado nos queda negativo, eso quiere decir que la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $x < \frac{1}{2}$.
	Sustituyendo estos valores en la ecuación de la segunda derivada: $f(2) = 12(2) - 6 = 6$ El resultado nos queda positivo, eso quiere decir que la función es convexa hacia arriba en el intervalo $x > \frac{1}{2}$.
Asumiendo que sí hay cambio en la concavidad en estos valores	Sustituyendo estos valores en la ecuación inicial:

críticos, los sustituimos ahora en la ecuación inicial.

$$f(-6) = 2(-6)^3 - 3(-6)^2 + 6(-6) - 1$$
$$f(-6) = 2(-216) - 3(36) - 36 - 1$$
$$f(-6) = -432 - 108 - 36 - 1 = -577$$

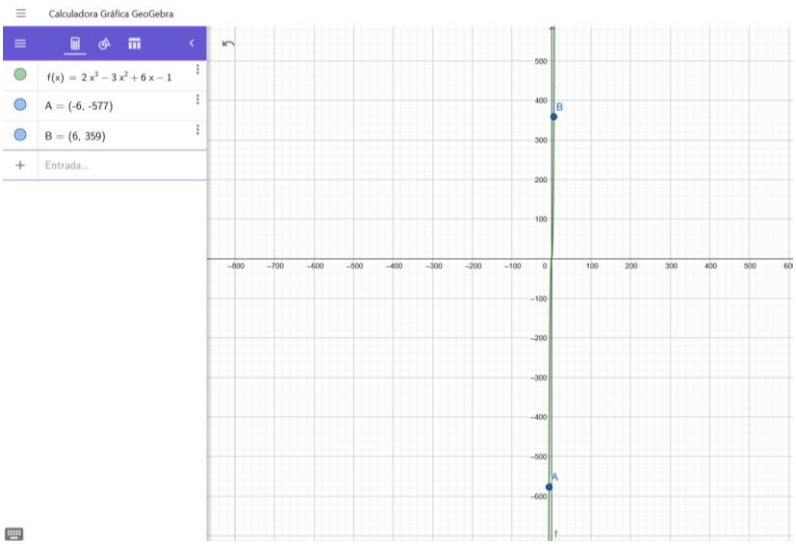
La coordenada del punto de inflexión A (-6,-577)

Sustituyendo estos valores en la ecuación inicial:

$$f(6) = 2(6)^3 - 3(6)^2 + 6(6) - 1$$
$$f(6) = 2(216) - 3(36) + 36 - 1$$
$$f(-6) = 432 - 108 + 36 - 1 = 359$$

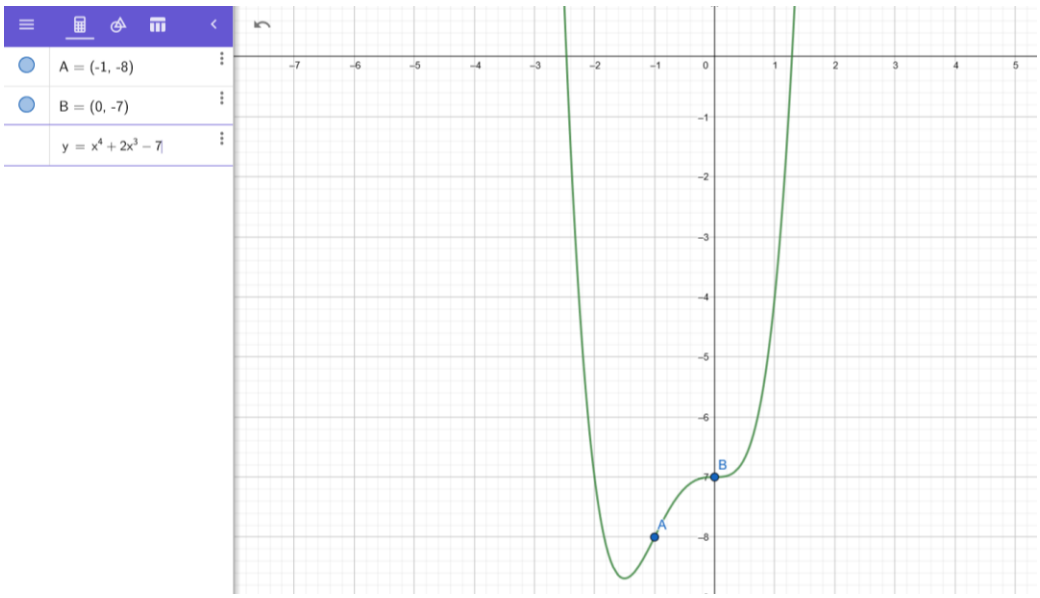
La coordenada del punto de inflexión B (6, 359)

Función $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$



2. Calcula los intervalos en que la curva $y = x^4 + 2x^3 - 7$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Sacamos la primera y segunda derivada de la función.	$f'(x^4 + 2x^3 - 7) = 4x^3 + 6x^2$ $f''(4x^3 + 6x^2) = 12x^2 + 12x$
Igualamos a cero esta ecuación y la resolvemos para hallar los valores críticos.	$f(0) = 12((0) + 1) = 1$ $12x^2 + 12x \Longrightarrow 12(x + 1)$ Los valores críticos son: $x = 0$ y $x = -1$
Tendríamos que demostrar que en estos puntos hay un cambio en la concavidad (queda para el alumno esta demostración).	
Asumiendo que sí hay cambio en la concavidad en estos valores críticos, los sustituimos ahora en la ecuación inicial.	Sustituyendo estos valores en la ecuación inicial: $f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 7$ $= 1 - 2 - 7 = -8$ La coordenada del punto de inflexión A (-1,-8)
	Sustituyendo estos valores en la ecuación inicial: $f(0) = (0)^4 + 2(0)^3 - 7 = -7$ La coordenada del punto de inflexión B (0,-7)
$y = x^4 + 2x^3 - 7$	



Gráfica de la función. Aplicación: GeoGebra

Ejercitando mi habilidad

Instrucciones Resuelve los siguientes problemas

	PROBLEMA	SOLUCIÓN:
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $f(x) = x^3 + 2$	
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $f(x) = x^5 - 4x$	
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1x$	
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $f(x) = 2x^3 - 24x$	
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 6x$	
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 6x$	
	Hallar los puntos máximos y mínimos e inflexión de la función: $y = x^3 - 9x^2 + 15x$	
	La producción de cierta hortaliza en un invernadero, $Q(x)$ en kg, depende de la	

	temperatura x en °C, según la expresión: $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$. a) Calcular razonadamente ¿Cuál es la temperatura óptima para mantener en el invernadero? b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?	
	En una empresa, la relación entre la producción (x, expresada en miles de toneladas) y los costes medios de fabricación ($f(x)$, expresados en miles de ptas.) es del tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$ a) Sabiendo que dichos costes ascienden a 43,000 ptas, si la producción es de 1,000 tm, que son 36,000 ptas. Si se producen 2.000 tm, y que la segunda derivada de dicha función es igual a 2, determinar la función de los costes medios. b) Obtener razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. c) A la vista de los resultados del apartado anterior, calcular razonadamente la producción óptima de la empresa y sus costes medios.	

Rescatando mis Aprendizajes (Producto esperado)

Instrucciones. - Responde lo que se pide

1. Utilizando las siguientes funciones determina las operaciones que se piden

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 1$

$g(x) = 2x^2 + 3$

a) $(f + g)(x)$

b) $(g - f)(x)$

2. Aplicando las reglas de derivación realiza los siguientes problemas

a) Dx $4x + 6$ =

b) Dx $3x^4 - 2x^2 + 2x - 5$ =

c) Dx $3x^{-3} - 4x^6$

d) Dx $(2x - 2)(x^3)$=

e) Dx $(x + 4)^3$ =

f) Dx $\sqrt{2x - 6}$ =

g) Dx cos (x+6) =

h) Dx ln (x+1)=

3. Realiza las siguientes derivadas sucesivas y completa el siguiente cuadro con ellas

Función ***Y***	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
$3x^4$			
$6x^4 + e^x$			
Sen x			

4. Hallar los puntos máximos, mínimo e inflexión. $4y = x^4 - 6x^2 + 8$

5. La producción de brócoli congelado en una empresa se representa como P(x) en kilogramos, la cual depende de la temperatura indicada por la variable x en °C, de acuerdo a la ecuación: $P(x) = (x + 2)(32 - x)$

a) Calcula cual es la temperatura óptima para mantener la producción.

b) ¿Qué producción de brócoli se obtiene a esa temperatura?

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- DELSOL, S. (s.f.). *Desigualdad matemática*. Obtenido de https://www.sdelsol.com/glosario/desigualdad-matematica/
- Descartes2D. (22 de 10 de 2019). *Descartes2D*. Obtenido de Derivadas sucesivas. Análisis: función derivada.: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funcion_derivada/derivada_4.htm
- Enciclopedia.us. (s.f.). *Relación Matemática*. Obtenido de http://enciclopedia.us.es/index.php/Relaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica
- *FÍSICALAB*. (s.f.). Obtenido de Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas: https://www.fisicalab.com/apartado/f-inyectiva-sobreyectiva-biyectiva
- FISICALAB. (s.f.). *Indeterminaciones*. Obtenido de https://www.fisicalab.com/apartado/indeterminaciones
- Fuenlabrada, S. (s.f.). *Cálculo diferencial.* México: McGraw Hill.
- García Miranda, R., Preciado Sánchez, A., & Robles Serrano, R. (2015). *Cálculo diferencial.* Jalisco: KeepReading.
- González Cabrera, V. M. (1997). *Cálculo 4000.* Ciudad Mx: Progreso.
- Sánchez Almanza, O. (s.f.). *Cálculo diferencial.* México: Keepling.
- SEP. (s.f.). *sems.gob.mx.* Obtenido de Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. Asignatura: C: http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/BT_Calculo_Diferencial.pdf
- UniversoFórmulas. (2020). *Función biyectiva*. Obtenido de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-biyectiva/
- UniversoFórmulas. (2020). *Runción sobreyectiva*. Obtenido de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-sobreyectiva/

RELACIÓN DE IMÁGENES

- BLOQUE III. Imagen tomada de: https://cocktailmarketing.com.mx/las-gemas-del-infinito-para-una-marca-2019/
- BLOQUE IV. Tomada de: Imagen tomada de: https://wallhere.com/es/wallpaper/137617?__cf_chl_jschl_tk__=9030f0101fdd7753005da1eaae3f83beb8e205ad-1605324026-0-AU3_BRXcTUKo25-K1VNKEcEFrOnoJXZcAYlcnfRzHjPBFqSgN0fmRosbrTp4aWXYL5rHb-_wp8RV7VZ84VT0qhIL02nrYcNkuFZThkg_LJM4MmSvqXhWkO5Byfa2jMxaL6g1ixfYT5ZD3gIHJHCctXPtpLx-dKgEISkYOF_MLleAvq_ig5zLgfqhRsEjEke_CLWUl_InU5RCVsFv8CQac5RRxFHvxGTh-kR8_5ESxQk0FHHJ18bKuj9jIa07sUfKPFDCNxMmT5-wAx4Z473R_E-uy0HITrF4VnFzFwRLhmBP
- Imágenes tomadas de http:pixabay.com

CÁLCULO DIFERENCIAL