Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Guanajuato.

CÁLCULO INTEGRAL

CUADERNO DE TRABAJO
QUINTO SEMESTRE

CÁLCULO INTEGRAL
INGLÉS V
FÍSICA II
CIENCIA, TECNOLOGÍA, SOCIEDAD Y VALORES

Número de registro:
03-2021-121413142200-01

Secretaría de Educación de Guanajuato

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Mensaje de la Directora General

Joven Estudiante:

En todo este proceso de incorporación al mundo profesional, las matemáticas tienen una importancia decisiva, por lo que su aprendizaje en la preparatoria es de la mayor importancia. Veamos por qué.

La competencia lógico matemática, la capacidad de escuchar; la expresión oral clara y la redacción lógica nos permiten incorporar información nueva y transmitirla en cualquier situación, sea escolar o laboral. Estas habilidades son, por lo tanto, la puerta de entrada para conocer todo lo que nos rodea (incluso las demás disciplinas) y para darnos a conocer a quienes nos rodean. Sin estas habilidades básicas no podemos tener éxito en la vida social adulta.

La reflexión sobre el uso cotidiano y su mejor conocimiento conducen aun pensamiento más ordenado, por lo que el aprendizaje de las materias básicas en la preparatoria permite a los alumnos tener un instrumento para clasificar mejor sus ideas.

En todo acto de comunicación, ya sea símbolos, números, de forma oral o escrita, intervienen una serie de elementos necesarios para que dicho acto sea eficaz. O lo que es lo mismo, sin estos componentes el proceso comunicativo no sería posible.

Directorio

Dra. Virginia Aguilera Santoyo
Directora General

Ing. Osvaldo Martín García Delgado
Director Académico

C.P Vicenta Martínez Torres
Directora Financiera y Administrativa

Lic. Sara Cecilia Casillas Martínez
Directora de Planeación y Desarrollo

Lic. Carlos Alberto Gorostieta Romero
Director de Vinculación

C.P. Alfredo García Flores
Director de Desarrollo Humano

Lic. Jaime Díaz Zavala
Director de Asuntos Jurídicos

LIA. Reynaldo Nava Garnica
Subdirector de Tecnologías de la Información

Comité Editorial

Comisión Revisora

Cecilia Lara Rodríguez - Directora del Plantad León San Juan Bosco.
Silvia Anahí Jiménez - Directora del Plantel Silao.
Diana Rubio Zarazúa - Directora del Plantel San José Iturbide**.**
Areli Mendiola Gómez - Subdirectora Académica del Plantel Purísima del Rincón.
Silvia Yadira Ramírez Mota - Subdirectora Académica del Plantel Celaya II.
Ma. Concepción Barrientos - Presidente de la Academia Estatal de Comunicación.
Zenzilt Anahí Herrerías Guerrero - Academia Estatal de Comunicación.
Ma Trinidad Rodríguez Muñoz - Academia Estatal de Comunicación.
Juan José Aviña Hernández - Academia Estatal de Comunicación.
Adriana Frías Ramírez Academia Estatal de Comunicación.
Pedro Arredondo González - Presidente de la Academia Estatal de Ciencias Experimentales.
Carla Renata Villagómez Balcázar - Secretaria de la Academia Estatal de Ciencias Experimentales.
Gerardo Medina Jiménez – Presidente de la Academia Estatal de Matemáticas.
José de Jesús Leos Mireles - Academia Estatal de Matemáticas.
Néstor José Guevara Ordoñez - Academia Estatal de Matemáticas.
Martha Margarita Martínez Rangel - Presidente de la Academia Estatal de inglés.
María del Carmen Martínez Ávila - Academia Estatal de inglés.
Ma. Elena Campos Campos - Academia Estatal de inglés.
María Leticia Núñez Pascual - Academia Estatal de inglés.
Lilia López Aguado - Academia Estatal de inglés.
Francisco Javier Alcacio González - Academia Estatal de inglés.
Celina Michelle Martínez Felipe - Academia Estatal de Humanidades.
Adela Tierrablanca Estrada - Academia Estatal de Humanidades.
Ma. Inés Rosas Bravo - Academia Estatal de Humanidades.

Colaboración Especial

Mtra. Celia Margarita García Esparza - Coordinadora de Cuerpos Colegiados.
Ing. Julio Cesar Vargas Manríquez — Analista especializado para el área de Docencia.

Docentes Participantes

Cuaderno de Trabajo de Cálculo Integral

Gerardo Medina Jiménez - Plantel Comonfort.

Néstor José Guevara Ordoñez - Plantel León.

José de Jesús Godoy Alvarado - Plantel Irapuato III.

José de Jesús Leos Mireles - Plantel Silao.

Sergio Arturo Vargas Aguilera - Plantel Irapuato III.

Uriel Malagón Corrales - Plantel Xonotli.

Agustín Delgado Vega - Plantel Ocampo.

Daniela Tenorio Guzmán - Plantel Irapuato III.

Francisco Lucio Palacios- León San Juan Bosco.

Francisco de Arcos Flores - Plantel Purísima del Rincón.

CONTENIDO

Aprendiendo a usar el cuaderno:

Símbolos de Identificación

Rescatando mis Aprendizaje.

Para aprender

Ejercitando mi habilidad.

¿Qué Aprendí?

Rescatando mis Aprendizaje

Actividad Transversal

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Cálculo Integral que vas a cursar este semestre se encuentra dentro del campo disciplinar de Matemáticas, se imparte en el quinto semestre del Bachillerato Tecnológico y tiene como propósito que aprendas a identificar, utilizar y comprender los sistemas de representación de la acumulación del cambio continuo y del cambio discreto con fines predictivos y de modelación.

Muchas veces nos preguntamos la aplicabilidad de lo que aprendemos y eso se reduce a una sola pregunta ¿De qué me va a servir aprender Cálculo Integral, pues bien vamos a explicar la aplicabilidad de esta rama de las matemáticas en nuestra vida? Una Integral se puede asimilar a una suma de infinitos términos, todos ellos de un tamaño infinitesimalmente pequeño, por lo tanto, tendrá aplicabilidad en cualquier situación en la que tengamos que sumar fragmentos muy pequeños para llegar a un total.

Ahora bien, el Cálculo integral se puede resumir en las siguientes preguntas:

- ¿Cómo encuentras el área bajo una curva?
- ¿Cómo encuentro la longitud de una curva?
- ¿Hay alguna manera de darle sentido a la idea de sumar un número infinito de partes infinitamente pequeñas?

Supongamos que queremos calcular un área. Podemos descomponer esa área en infinita cantidad de cuadrados muy pequeños asimilando a los pixeles de las imágenes emitidas por nuestro televisor, de tal forma que el área total sería el número de cuadraditos multiplicado por el área de uno de ellos y haciendo cuadraditos cada vez más pequeños podríamos ajustarnos a cualquier área que nosotros necesitemos calcular. Es así cuando la Integral adquiere un sentido más lógico un sentido de integrar muchas pequeñas partes en un todo.

Las seis Competencias Genéricas que desarrollarás en este curso son:

- Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Participa y colabora de manera efectiva en grupos diversos.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Las seis Competencias disciplinares que desarrollarás durante el curso son:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

CONTENIDOS

EJE	COMPONENTE	CONTENIDOS CENTRALES	CONTENIDO ESPECÍFICO	APRENDIZAJE ESPERADO	PRODUCTO ESPERADO
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y acumulación: elementos del Cálculo integral.	Aproximación y cálculo del área bajo la curva por métodos elementales (Método de los rectángulos y método de los trapecios).	• La gráfica como descripción del cambio. ¿Cómo interpreto gráficamente el crecimiento lineal? ¿Qué caracteriza al crecimiento no lineal? • Aproximación del área bajo curvas conocidas, utilice curvas que representan crecimiento lineal y crecimiento no lineal. • Comparación de aproximaciones. ¿Alguna es mejor?, ¿en qué circunstancias? • Conjeturar sobre expresiones generales del área bajo la curva (ejemplo el área bajo la gráfica de $f(x) = 1$ o bajo $f(x) = x$, así como el área bajo $f(x) = x^2$, con x entre 0 y 1, o entre 1 y 2, o en general entre a y b, donde $a<b$). Usa el reconocimiento de patrones. • Interpretación del área según el fenómeno (ejemplo, el área de la función velocidad se interpreta como la distancia recorrida) ¿Por qué las medidas de la acumulación resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?	• Aproxima el área bajo una curva mediante rectángulos inscritos, se mide o calcula el área de éstos y se estima el valor del área bajo la curva. • Compara los resultados de diversas técnicas de aproximación. • Acota el valor del área bajo la curva, aproximando por exceso y por defecto. Usa ambos métodos de aproximación: rectángulos y trapecios. • Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración. • Interpreta, por extensión o generalización, el área bajo la curva de gráficas de funciones trigonométricas básicas (seno y coseno).	• Construir una aproximación del área por medios diversos. • Comparar el valor del área por medio de rectángulos y de trapecios inscritos. • Aproximar el valor del área bajo una curva del tipo $y = u^n$. • Encontrar el desplazamiento de un móvil, dado su velocidad. • Reconocer y argumentar las relaciones entre posición, velocidad y aceleración para funciones polinomiales básicas.

EJE	COMPONENTE	CONTENIDOS CENTRALES	CONTENIDO ESPECÍFICO	APRENDIZAJE ESPERADO	PRODUCTO ESPERADO
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y acumulación: elementos del Cálculo integral.	Antiderivada de las funciones elementales (algebraicas y trascendentes).	• Técnicas para obtener la antiderivada. ¿Qué significa integrar una función?, ¿podrías imaginar el llenado y vaciado de un recipiente en términos de la integración? ¿Qué patrones reconoces para la integral de x, x^2, x^3? • Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual. ¿Qué es integrar en ese contexto de la física? ¿Integrar la función velocidad, integrar la función aceleración? • Construcción de tablas de integración. ¿Reconoces patrones básicos? • ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con la acumulación y su medida, propiedades, relaciones y representaciones?	• Encuentra la antiderivada de funciones elementales polinomiales). • Reconoce el significado de la integral definida con el área bajo la curva. • Descubre relaciones inversas entre derivación e integración: “Si de una función se obtiene su derivada, qué obtengo si de esa derivada encuentro su antiderivada”. • Interpreta, por extensión o generalización, la integral indefinida de funciones polinomiales y trigonométricas básicas (seno y coseno).	• Encontrar la Antiderivada de expresiones del tipo x^n. • Completar una tabla de integración dada. • Calcular el área bajo la curva de funciones diversas. • Integrar funciones elementales dadas mediante fórmulas generales.

EJE	COMPONENTE	CONTENIDOS CENTRALES	CONTENIDO ESPECÍFICO	APRENDIZAJE ESPERADO	PRODUCTO ESPERADO
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y acumulación: elementos del Cálculo integral.	Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida y uso intuitivo de los procesos infinitos y las situaciones límite.	• Técnicas para obtener la antiderivada. ¿Qué significa integrar una función?, ¿podrías imaginar el llenado y vaciado de un recipiente en términos de la integración? ¿Qué patrones reconoces para la integral de x, x^2, x^3...? • Ejemplos de la cinemática y su interpretación contextual. ¿Qué es integrar en este contexto de la física? ¿Integrar la función velocidad, integrar la función aceleración? • Construcción de tablas de integración. • ¿Reconoces patrones básicos? • ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con la acumulación y su medida, propiedades, relaciones y representaciones?	• Utiliza técnicas para la antiderivación de funciones conocidas. • Obtiene la integral indefinida de una función dada. • Visualiza la relación entre área e integral definida. • Calcula la antiderivada de funciones trigonométricas básicas. • Utiliza sucesiones y límites para obtener integrales definidas.	• Resolver situaciones del llenado de recipientes con flujo constante. • Encontrar la posición de un móvil que se desplaza en línea recta con velocidad constante. • Determinar la posición de un móvil que se desplaza rectilíneamente con aceleración constante y con velocidad inicial conocida.

UNIDAD I

UNIDAD I.

APROXIMACIÓN Y CÁLCULO DEL ÁREA BAJO LA CURVA POR MÉTODOS ELEMENTALES

Rescatando mis Aprendizajes.

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN (DEMOSTRACIÓN).

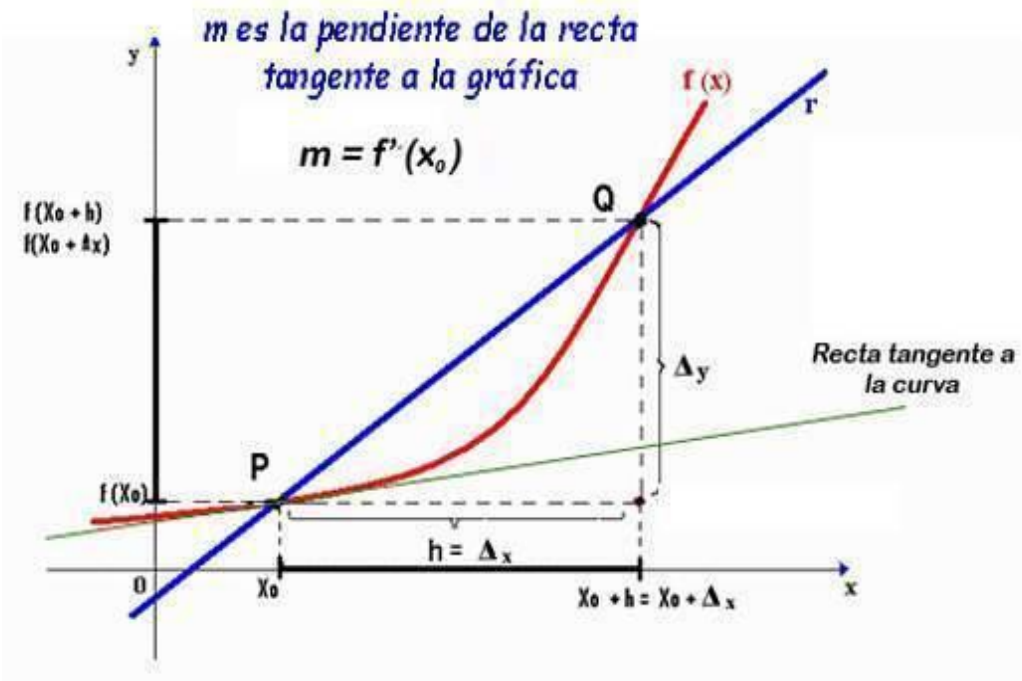
La derivada es un importante concepto en el mundo de las matemáticas ya que tiene un sinfín de aplicaciones a lo largo de este campo desde calcular velocidades hasta tazas de crecimiento y sin mencionar en cuantos fenómenos naturales se le puede hallar.

Existen distintas fórmulas para calcular una derivada, la fórmula que aplicaremos depende a la forma de la función que queramos derivar sin embargo dichas formulas se obtienen de una manera similar la cual es haciendo operaciones mediante la definición de derivada.

Definición de derivada.

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \quad \boldsymbol{algunas\ ocasiones\ \Delta x = h}$$

Esta fórmula la obtenemos mediante la siguiente interpretación geométrica.



De esta definición vamos a obtener las fórmulas para la derivación de diferentes funciones.

DERIVADA DE UNA CONSTANTE.

Una constante es un valor que no cambia 5 siempre será 5 igualmente la letra a también puede ser una constante siempre y cuando su valor no cambie. Lo primero que hacemos es sustituir el valor constante en este caso K en la definición de derivada.

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(k) - f(k)}{\Delta x}}$$

El término $f(x + \Delta x)$ será igual a nuestra constante K ya que al ser una constante su imagen siempre será la misma en el eje de las x.

$$\mathbf{f'(x) = \frac{0}{\Delta x} = 0}$$

$$f'(k) = 0 \text{ siendo k una constante}$$

Hecho esto queda demostrado que la derivada de una constante será 0

DERIVADA DE UNA POTENCIA.

Antes de analizar esta en detalle, primero recordemos cómo es la fórmula generalizada de la suma de a y b elevada a n:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\ (n-r)!}\ a^{n-r}\ b^r = a^n + n\ a^{n-1}\ b + \mathcal{O}(b^2)$$

Aquí hay que comentar varias cosas. La primera que los signos de exclamación son factoriales (el producto del número por todos los anteriores al mismo). La segunda que en el último pasó encerramos en el último término todos los sumandos que incluyan ***b*** *elevado a* ***2*** *o potencias superiores. La factorial de* ***0****, recordemos, no es* ***0*** *sino* ***1***:

$$0! = 1$$

Teniendo esta fórmula en mente, la derivada de la potencia ***n****-ésima de* ***x*** *se calcula del siguiente modo*:

$$f = x^n$$

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}\,h + \mathcal{O}(h^2) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{n\,x^{n-1}\,h + \mathcal{O}(h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(n\,x^{n-1} + \mathcal{O}(h)\right) \\ &= n\,x^{n-1} \end{aligned}$$

En el último paso nos cargamos todos los términos que involucren a **h** porque es prácticamente nula en el límite considerado. El resultado es correcto para cualquier valor de **n**, si bien la expresión con factoriales requeriría mayor complejidad.

Por lo tanto, la derivada de una potencia será.

$$\mathbf{f'(x^n) = nx^{n-1}}$$

En caso de que la potencia este siendo multiplicada por una constante solo será necesario multiplicar la constante por el exponente de la potencia.

$$\mathbf{f'(kx^n) = k(n)x^{n-1}}$$

DERIVADA DE LA SUMA DE DOS FUNCIONES.

*Si **h** es la suma de las funciones **f** y **g**, dado que el límite de una suma es la suma de límites con las derivadas sucede lo mismo:*

$$h = f + g$$

$$h' = f' + g'$$

Obviamente esto incluye las restas, dado que f y g pueden tener cualquier signo.

DERIVADA DE UN PRODUCTO.

*Si, por el contrario, **h** es el producto de las funciones **f** y **g**, podemos obtener su derivada aplicando en el límite que podemos sumar y restar **f(x) g(x+h)** y separar la fracción en dos a conveniencia:*

$$h = f\ g$$

$$\begin{aligned}
h' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(g(x+h)\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= g\,f' + f\,g'
\end{aligned}$$

Por lo tanto, decimos que la derivada de un producto de dos funciones será:

$$\mathbf{f'\big(g(x) + f(x)\big) = g\,f' + f\,g'}$$

DERIVADA DE UN COCIENTE.

*Si **h** es el cociente entre **f** y **g**, teniendo en cuenta la derivada del producto y la de una función inversa, podemos obtener de golpe la expresión de la derivada del cociente considerando el producto entre **f** y **g** elevada a **-1**:*

$$h = \frac{f}{g}$$

$$h' = \frac{f'}{g} - \frac{f\,g'}{g^2} = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

Por lo tanto, decimos que la derivada de un cociente será:

$$\mathbf{f}'\left(\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}\right) = \frac{\mathbf{f}'\,\mathbf{g} - \mathbf{f}\,\mathbf{g}'}{\mathbf{g}^2}$$

DERIVADA DE LA FUNCION COSENO, SENO Y TANGENTE.

Usando la ecuación de Euler, podemos definir el seno y el coseno del siguiente modo:

$$cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)$$

$$sen(x) = -\frac{i}{2}\left(e^{i\,x} - e^{-i\,x}\right)$$

Ambas funciones, juntas, cumplen que:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

$$cos'(x) = -sen(x)$$

$$sen'(x) = cos(x)$$

La tangente, por su parte, cumple:

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$tg'(x) = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$$

DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA.

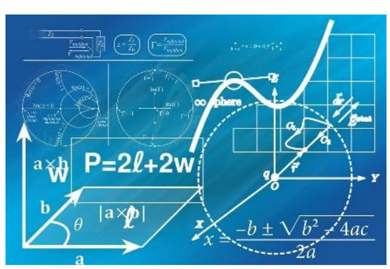
*Supongamos que **f** es la función inversa de **g** (no en el sentido que le suelen dar los matemáticos, sino en el de que multiplicadas dan **1**). Tras reescribirla como **g** elevada a **-1**, podemos obtener su derivada mediante la regla de la cadena derivando primero la potencia de **g** y después **g**:*

$$f = \frac{1}{g} = g^{-1}$$

$$f' = (-g^{-2})\,(g') = -\frac{g'}{g^2}$$

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN (DEMOSTRACIÓN)

En el cálculo integral también existen fórmulas para resolver integrales, al igual que en el cálculo diferencial usaremos la formula dependiendo de la forma que tenga la función a integrar, las fórmulas de integración se obtienen de las fórmulas de derivación debido a su naturalidad inversa lo que significa que la integración es lo contrario de la derivación así como la suma es lo contrario a la resta y viceversa, al integrar una función estamos obteniendo la función primitiva de f(x) la cual se denota F(x) lo cual quiere decir que si derivamos F(x) volveremos a obtener f(x).



Fuente: imagen recuperada en pixabay.com julio del 2020

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad [r \neq -1]$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad [a > 0]$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C \quad [a > 0]$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad [a > 0]$$

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1) + C$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$$

Todas las formulas se obtendrán de manera similar y ahora veremos una demostración de algunas fórmulas de integración todas, ya que el procedimiento es el mismo.

$$\int \mathbf{dx} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$$

Demostración.

Debido a que la integración y la derivación son procesos inversos basta con derivar x y obtener 1 y la derivada de la constante es 0 y así obtenemos el valor que multiplica a la diferencial en la integral, derivando la función primitiva hemos obtenido la función original por lo tanto cumple lo del proceso inverso.

$$\int \mathbf{x^n dx} = \frac{\mathbf{x^{n+1}}}{\mathbf{n+1}}$$

Demostración.

Para volver a obtener la función original primero vamos a derivar la función primitiva usando la fórmula de derivación de un cociente debido a que la primitiva tiene esta forma.

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{n+1(x^{n+1-1})(n+1)-(0)x^{n+1}}}{\mathbf{(n+1)}^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{(n+1)^2(x^n)-0}}{\boldsymbol{(n+1)}^2}$$

Fuente: Imagen recuperada en: www.pixabay.com junio 2020

¿Qué Aprendí?

EXAMEN DIAGNÓSTICO
Instrucciones. - elige la repuesta correcta

1. Sirven para designar la cantidad de elementos que tiene un conjunto

   a) Números naturales
   b) Números primos.
   c) Números reales.
   d) Números racionales.

2. Números que tienen únicamente dos divisores, el mismo número y el 1.

   a) Números primos.
   b) Números naturales.
   c) Números reales.
   d) Números racionales.

3. Selecciona la opción que muestra la notación matemática para describir un número entero par.

   a) k
   b) k + 2
   c) 2k

4. ¿Qué números enteros están comprendidos dentro del intervalo (¿1,5]?

   a) 2,3,4,5
   b) 1,2,3,4,5
   c) 1,2,3,4

5. ¿Qué números enteros están comprendidos dentro del intervalo (1,3)?

a) 2.

b) 1,2,3

c) ninguno.

6. ¿Qué números enteros son solución de la desigualdad $1<x\leqslant 5$?

a) 2,3,4,5

b) 1,2,3,4,5

c) 1,2,3,4

7. ¿Cuál es el conjunto solución de la desigualdad 4x+3<2+7x?

a) $x > \frac{1}{3}$

b) $x < \frac{1}{3}$

c) $x \leq \frac{1}{3}$

8. ¿Qué es una función?

9. ¿Qué es el dominio y el rango de una función?

10. Dadas las funciones f(x)=x+1 y g(x)=x2−1, Selecciona la opción que representa A (f+g)(x)

a)$\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}$

b) $\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$

c) $\mathrm{x} - \mathrm{x}^2$

11. Encuentra el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$=2

$$\frac{(1)^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \; indeterminación$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \; factorización\; por\; diferencia\; de\; cuadrados$$

$$\boldsymbol{x + 1 = 1 + 1 = 2}$$

b) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$=8

c) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$=∞

12.Encuentra la derivada de las siguientes funciones.

a) $\mathrm{f(x) = x^2 + 10x - 5}$

b) $\mathrm{f(x) = e^x}$

c) $\mathrm{f(x) = 5x^2 - 10x}$

Fuente: Imagen recuperada de www.pixabay.com junio 2020

Rescatando mis Aprendizaje (producto esperado)

CÁLCULO INTEGRAL.

1. Es la solución al siguiente ejercicio: $\int -6x\,dx =$

   A) $-6 + C$

   B) $-3x^2 + C$

   C) $-3x^2$

   D) $-\frac{6}{2}x^2$

2.- Es el resultado que se obtiene a aplicar la antiderivada.

A) Función primitiva

B) Antiderivada

C) Derivada

D) Diferencial

3.- Es el resultado de la siguiente expresión: $\int x^3 dx$

A) $x^3 dx$

B) x^3

C) $3x^2$

D) $\frac{x^4}{4} + C$

4.- Es el método de integración aplicable a integrales que no se pueden integrar de manera inmediata, y generalmente su integrando está formado por dos funciones. Este método de integración utiliza la fórmula: $\int udv = uv - \int vdu$

A) integrales inmediatas

B) integración por sustitución

C) integración por fracciones parciales

D) integración por partes

5.- Es el resultado de la siguiente expresión: $\int 2x^5 dx$

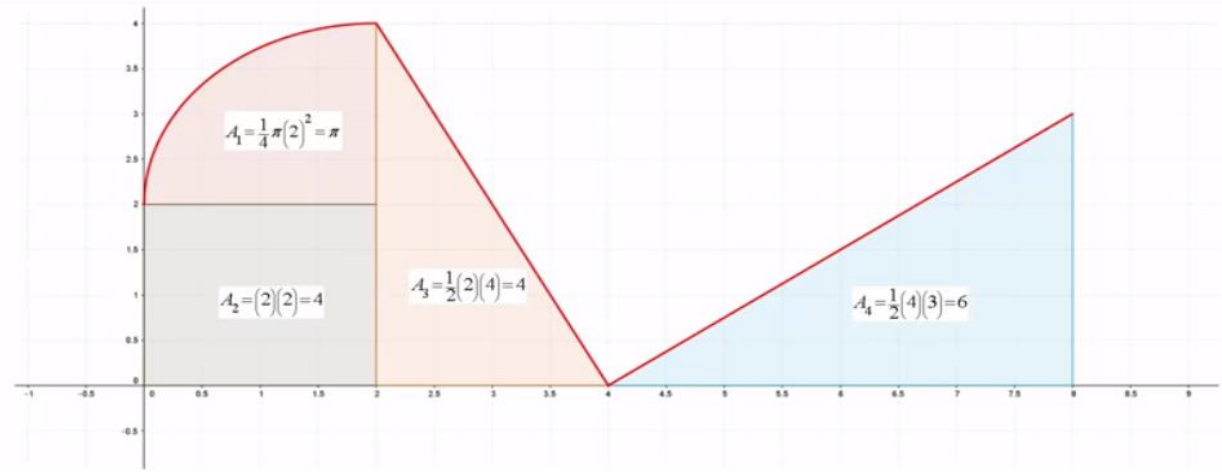
A) $\frac{x^6}{3} + C$
B) $2x^5$
C) $10x^4$
D) $\frac{x^6}{3}$

Para aprender más

ÁREA DE FIGURAS AMORFAS.

Cuando necesitamos calcular el área de una figura regular, solo requerimos de hacer uso de las fórmulas tradicionales conocidas.

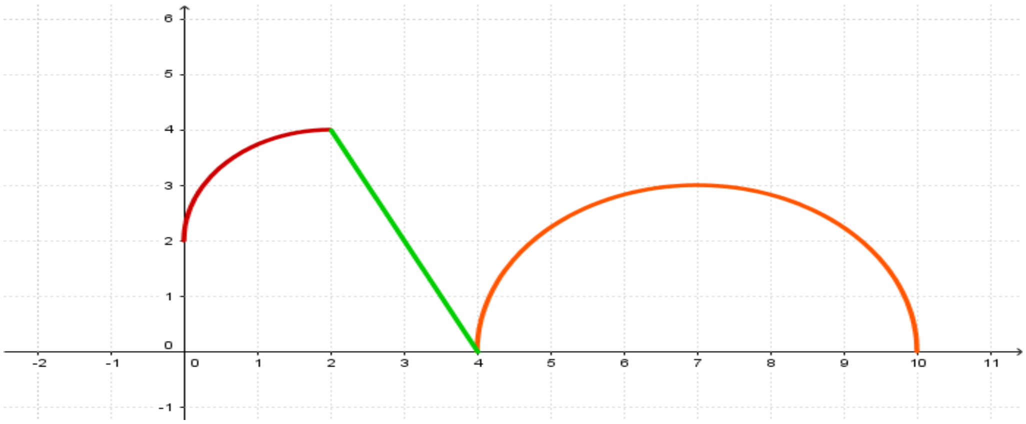
Sin embargo, no hay fórmulas directas para estimar el área bajo la curva en las figuras amorfas.



Para calcular el área de una figura amorfa, dividimos dicha figura en figuras más simples y sacamos el área de estas con las fórmulas ya conocidas y finalmente sumamos las áreas obtenidas.

EJEMPLOS RESUELTOS.

Dada la gráfica mostrada, compuesta de segmentos de rectas y circunferencias, determina el área bajo la curva.

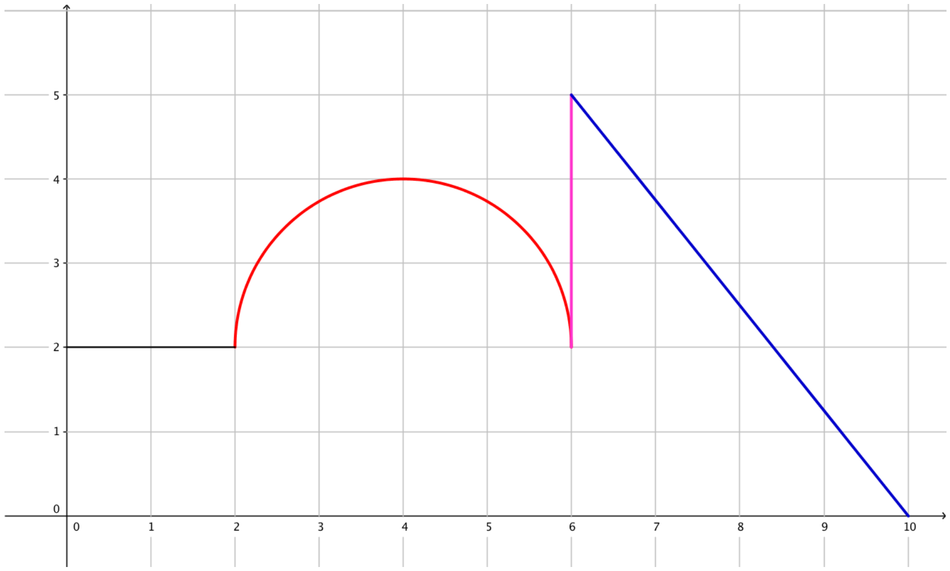


Explicación

Un medio círculo y un cuadrado de 0 a 2, un triángulo de 2 a 4 y un medio círculo de 4 a 10

π+4+9/2π+4=25.278

Dada la gráfica mostrada, compuesta de segmentos de rectas y circunferencias, determina el área bajo la curva.

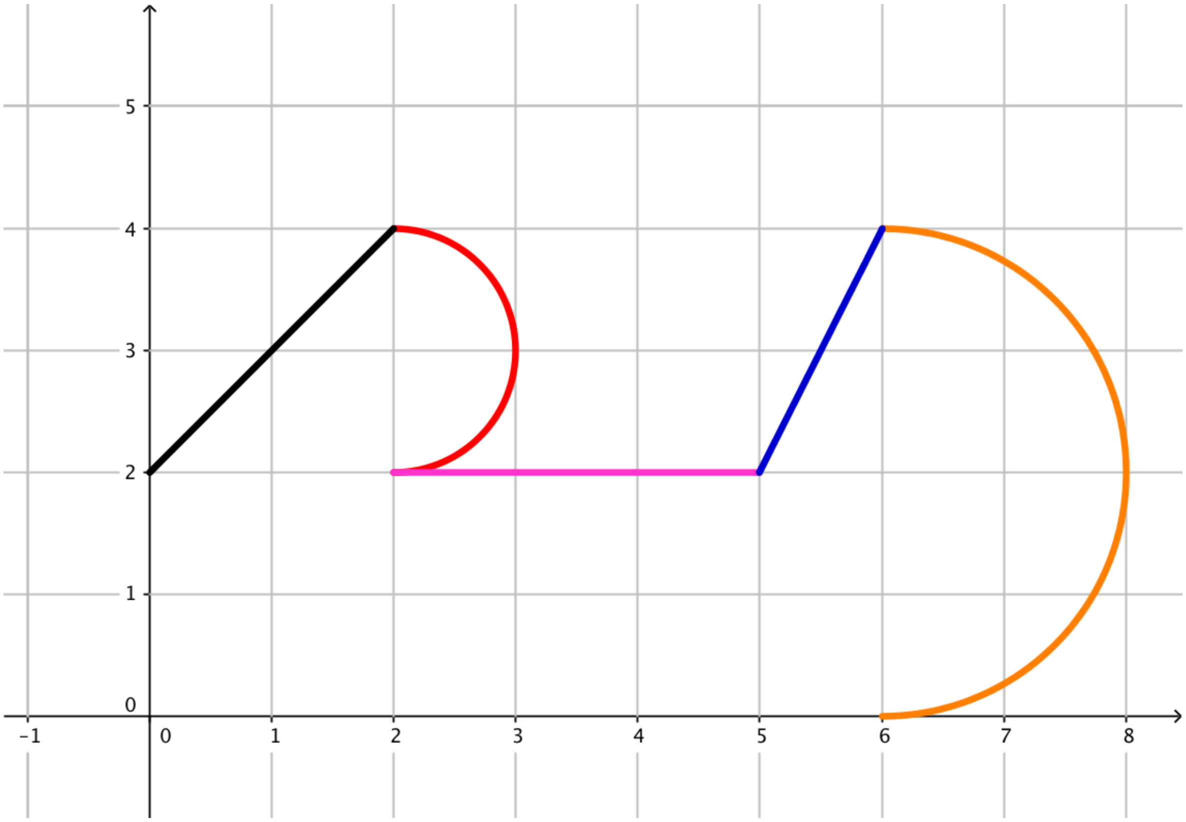


Explicación

Un cuadrado de 0 a 2, un medio círculo y un rectángulo de 2 a 6 y un triángulo de 6 a 10

$$2 \cdot 2+1/2(\pi \cdot 2^2)+4 \cdot 2+1/2(4 \cdot 5)=2\pi+22=28.283$$

Dada la gráfica mostrada, compuesta de segmentos de rectas y circunferencias, determina el área bajo la curva.



Explicación

Un cuadrado y un triángulo de 0 a 2, un medio círculo de 2 a 3, un cuadrado de 3 a 5,
Un cuadrado y un triángulo de 5 a 6 y un medio círculo de 6 a 8

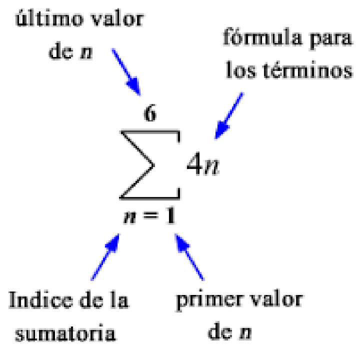
$$(2 \cdot 2)+1/2(2 \cdot 2)+1/2(\pi \cdot 1^2)+(3 \cdot 2)+(1 \cdot 2)+1/2(1 \cdot 2)+1/2(\pi \cdot 2^2)+2(5/2\pi)+13=22.854$$

NOTACIÓN SIGMA.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Esta representación abreviada de varios términos utiliza la letra griega sigma mayúscula, por eso se le denomina notación sigma. Aquí el índice de la suma ai es el i-ésimo término, y los límites inferior y superior de la suma son 1 y n; respectivamente.

En la notación de sigma tendremos la sumatoria de todos los términos de la forma ai cuando i toma valores sucesivos i=1,2,3,4,..,n



Fuente: Imagen recuperada de www.pixabay.com junio 2020

PROPIEDADES Y FÓRMULAS DE LA NOTACIÓN SIGMA

- Propiedades:

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$
2. $\sum_{i=1}^{n} [a_i \pm b_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} k(a_i) = k \sum_{i=1}^{n} a_i$

- Fórmulas:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

PROBLEMAS RESUELTOS.

Desarrolla y evalúa la sumatoria

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} 2^i}$$

Explicación:

$$\sum_{i=1}^{4} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

2.-Desarrolla y evalúa la sumatoria:

$$\sum_{k=2}^{10} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Solución correcta:

$$\boxed{\sum_{k=2}^{1} 0\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{10}\right)=10.929}$$

3.-Calcula el valor de la sumatoria

$$\boxed{\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n}}$$

Solución correcta:

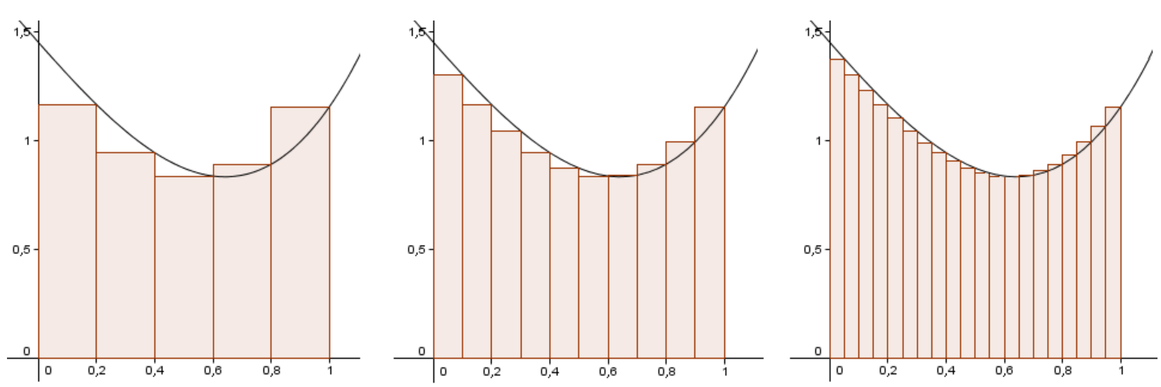
$$\boxed{\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=2.928}$$

SUMAS DE RIEMANN.

Son utilizadas para aproximar el área bajo la curva de una función continua f(x) en el intervalo [a,b].

Existen sumas inferiores y sumas superiores, en sumas inferiores el área bajo la curva será menor al área real y en las sumas superiores el área será mayor al área real.

Dichas sumas de Riemann consisten en dividir el intervalo cerrado en particiones en forma de rectángulo y obtener su área y finalmente sumarlas para obtener la aproximación y para que el área sea exacta debemos aplicar un límite para que el número



de particiones vaya al infinito.

La fórmula para calcular exactamente el área de la función es.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(xi)\Delta x$$

PROBLEMAS RESUELTOS.

Calcula el valor de suma de Riemann de la función $f(x)=x^2-2$ en el intervalo [0,1]

Usando 4 subintervalos y considerando el valor FINAL de cada subintervalo para determinar la altura de los rectángulos.

Solución:

Valor del subintervalo: $\Delta xi = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

Puntos finales de cada subintervalo: $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$

$$\sum_{i=1}^{4} f(xi^*)\Delta xi = f\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + f(1)\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{49}{32} = -1.53125$$

Determina la suma de Riemann de la función $f(x)=2-x^2$ en el intervalo [0,1] cuando se divide el intervalo en un número n de subintervalos y considerando como altura el valor de la función en el FINAL de cada subintervalo. Esto es, la generalización de la suma de Riemann a n subintervalos.

Solución

Tamaño del subintervalo = $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

Valor final en cada subintervalo = $i(\frac{1}{n}) = \frac{i}{n}$

Altura del rectángulo = $2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2$

Suma de Riemann: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x = \sum_{i=n}^{n} \frac{2}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$

$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$, aplicando fórmulas:

$= \frac{2}{n}(n) - \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{5}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$

Sea f(x)=√X en el intervalo [0,4], evalúa la suma de Riemann utilizando cuatro subintervalos del mismo tamaño. Proporciona una aproximación de dos decimales en el resultado. Usa el valor **INICIAL DEL SUBINTERVALO** para el cálculo.

Solución:

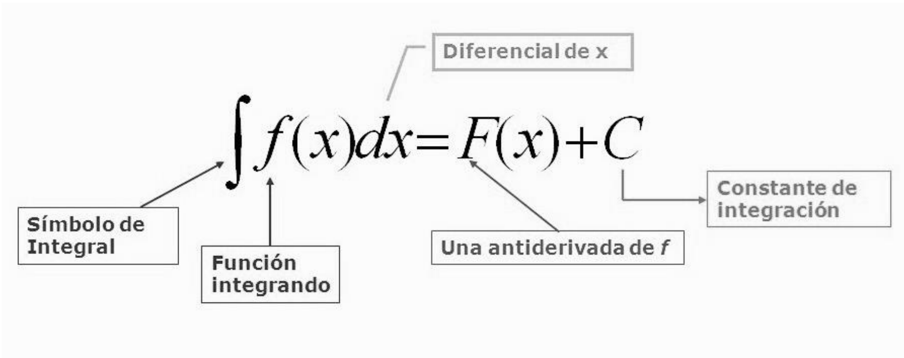
Para [0,4], n=4, $\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$**. Utilizando el valor inicial del intervalo**

$(x, f(x)) = (0,0), (1,1), (2,1.41), (3,1.73)$

$$\sum_{i=1}^{4} f(xi)\Delta xi = (0)(1) + (1)(1) + (1.41)(1) + (1.73)(1) = 4.14$$

ANTIDERIVADAS.

Suponer que se decide encontrar una función F cuya derivada es f(x)=cosx. Con los conocimientos que se tienen de derivadas, se puede afirmar que F(x)=sinx, la función F **es una anti derivada de** f**.**



PROBLEMAS RESUELTOS.

1.Indica cual función es la antiderivada general de f(x)=x+3

Solución

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2}+3x+C)=x+3$$

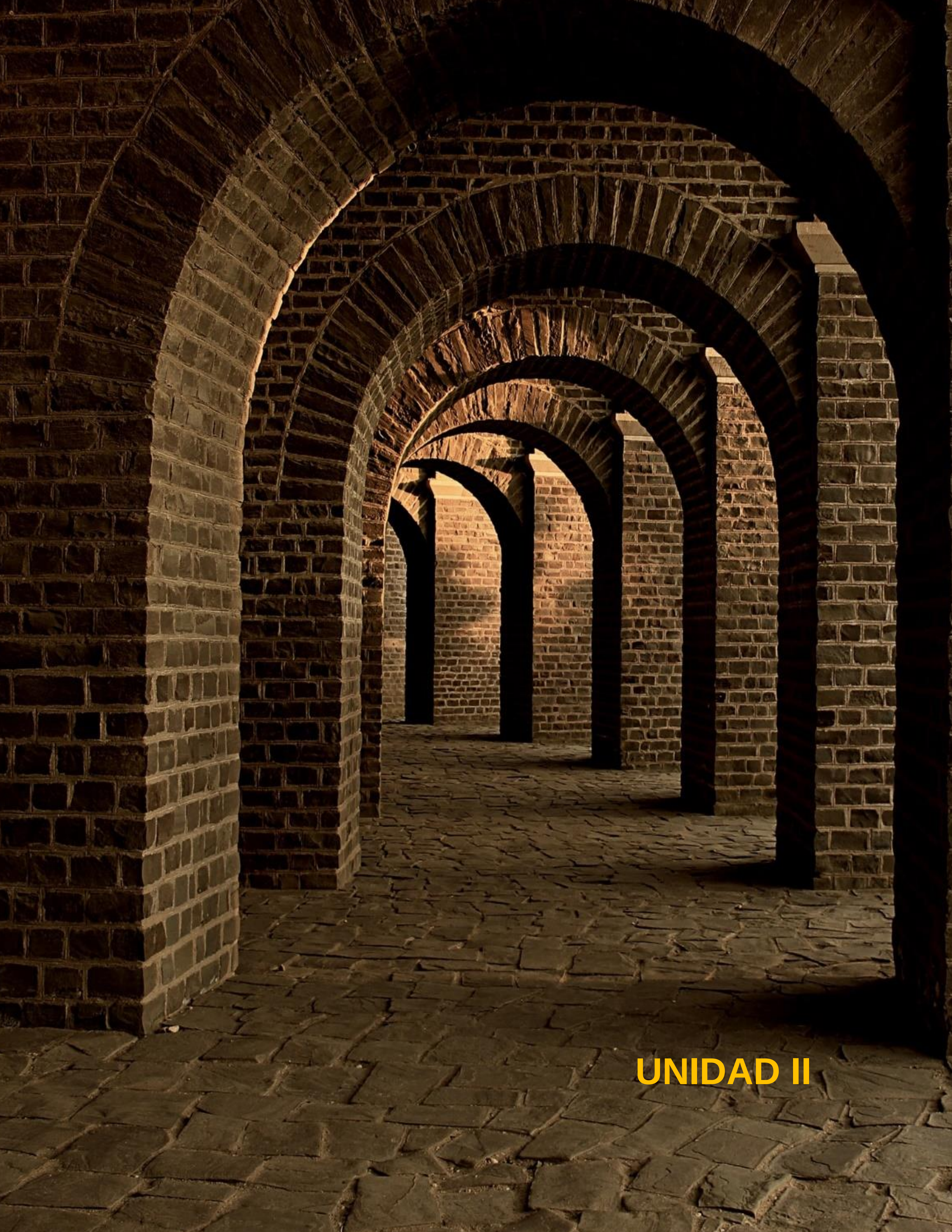
2.Indica cual función es la antiderivada general de f(x)=cos3x

Solución

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}\sin 3x)=\cos 3x$$

3. Selecciona una antiderivada de f(x)=sinx

$$\frac{d}{dx}(1-\cos x)=\sin x$$



UNIDAD II

UNIDAD II

ANTIDERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES (ALGEBRÁICAS Y TRASCENDENTES).

Rescatando mis Aprendizaje.

1. Aplica los teoremas de derivación correspondientes para hallar la integral de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2017$

b. $f(x) = (3x - 4)^2$

c. $f(x) = 2x(x+3)$

d. $f(x) = 3 \text{ sen}(2x)$

e. $f(x) = 4x^3 - x^2$

f.- $f(x) = 6x + 3$

g. $f(x) = 6x^{-3} + 4x^3 - x$

Para aprender más.

Introducción

Ya estamos familiarizados con la derivada de una función; operación que recibe el nombre de diferenciación. Por ejemplo:

$$d/dx\ (\text{sen } x) = \cos x$$

$$d/dx(x2 + 2x + 1) = 2x + 2 = 2(x + 1)$$

Ahora nos interesa conocer el proceso inverso; es decir dada la derivada de una función; determinar la función original. Es decir, nos interesa determinar la operación inversa de la diferenciación (hecho que ya es conocido en matemáticas para otras operaciones: la operación inversa de la adición es la sustracción; la operación inversa de la multiplicación es la división).

Ejemplo: ¿Qué función n tiene por derivada cos x?

Ya sabemos que la respuesta es sen x, pues:

$$\boldsymbol{d/dx(sen\ x)\ =\ cos\ x}$$

Ahora, esta pregunta la podemos representar matemáticamente como sigue:

¿A qué función, tal vez salvo en una cantidad finita de puntos, es igual $\int\ cos\ cos\ dx$?

y nuestra respuesta será.

$$\boldsymbol{\int cos\, dx\ = senx}$$

En este caso decimos que sen *x* es una primitiva o antiderivada de la función cos *x*.

Actividad

1. Encuentra una antiderivada o primitiva de la función x + 1.
2. Encuentra una antiderivada o primitiva de la función sen x.

Para aprender más.

La primitiva o antiderivada de una función

Una función F se llama primitiva o antiderivada de una función f, en un intervalo I, si F´(x) = f(x) para todo valor x en I, salvo tal vez para un número finito de puntos.

Ejemplo: $\boldsymbol{F(x) = 5x4 + x2 + 2}$, entonces $\boldsymbol{F'(x) = 20x3 + 2x}$.
Así si $\boldsymbol{f(x) = 20x3 + 2x}$, decimos que f es la derivada de F y que F es la antiderivada o primitiva de f, pues

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}:$$

Observemos que $\boldsymbol{G(x) = 5x4 + x2 + 10}$ también es una primitiva de f, pues

$$G'(x) = f(x):$$

En general $\boldsymbol{F(x) = 5x4 + x2 + c}$, con c una constante, es una antiderivada de f, pues

F´(x) = f(x):

TEOREMA.
Si F y G son dos funciones tales que
$$F'(x) = G'(x) \ \forall x \in I$$
Entonces existe una constante C_0 tal que
$$F(x) = G(x) + Co \quad \forall x \in I$$

La integral indefinida.

Como ya hemos dicho en la introducción, la antidiferenciación es el proceso de determinación de todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo que denota esta operación es $\int$ $\quad y\ escribimos$.

"F es una antiderivada de f" , $\Leftrightarrow \int \quad (x)dx = F(x) + c;;$

donde F´(x) = f(x).

Esta notación fue introducida por el matemático alemán Leibniz.

Definición.

Sea F una primitiva cualquiera de f. La integral indefinida de f(x) con respecto a x se denota como:

$$\int \quad \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

y se define como:

$$\int \quad \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + c};$$

Donde c es una constante arbitraria.

En otras palabras, la integral indefinida de f es un representante de la familia de todas sus primitivas posibles. Es muy importante entender esto, pues quiere decir que, al evaluar una integral indefinida, podremos reunir todas las constantes que surjan en su evaluación en una única constante genérica que denotaremos c. De esta forma, evaluar una integral indefinida de f equivale a encontrar a una antiderivada genérica.

Tabla de integrales inmediatas

Inmediatas	Con función - Cuasi inmediatas
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + k$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \operatorname{sen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2(f(x))) f'(x) dx = \operatorname{tg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2(f(x))) f'(x) dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$	$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + k$

Propiedades y métodos de calcular

- En la suma/resta: La integral de la suma es la suma de las integrales: $\int (u + v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx$

  Ejemplo: $\int (senx + x^2)\, dx = \int senx\, dx + \int x^2\, dx = -cosx \cdot \frac{x^3}{3} + k$
- En la constante: La integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función.

  Ejemplo: $\int 3 \cdot senx\, dx = 3 \cdot \int senx\, dx = 3(-cosx) + K$
- En la multiplicación: No hay regla fija

  Intentar que un factor sea la derivada del otro por cambio de variable si no, intentar hacer por el método por partes:

  Ejemplos: $\int 2x^3 dx = \int x^2 \cdot 2x\, dx = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{x^4}{2} + k$; $\int sinx \cdot cosxdx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2} + k$
- En la división: No hay regla fija

  - Intentar que el numeador sea la derivada del denominador, para aplicar Ln.
  - Si en el denominador hay una x^2, intentar que se parezca a la arctang.
  - Si no, hacer por el método cambio variable
  - Si no, aplicar método racionales.

  Ejemplo: $\int \tan x\, dx = \int \frac{sinx}{\cos x} dx = -\int \frac{-sinx}{cosx} = \ln\, \lvert cosx\rvert + k$

Fuente: Imagen recuperado de: http://www.ofimega.es/Manuales/BAT/Integrales.pdf

Ejemplos:

$$\int x^6 dx$$

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$$

$$\int 7x^3 dx$$

$$\int 7x^3 dx = \frac{7x^4}{4} + C$$

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C = \frac{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{5} + C$$

$$\int \frac{3}{x^4} dx$$

$$\int \frac{3}{x^4} dx = \int 3x^{-4} dx = \frac{3x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{3x^{-3}}{-3} + C = -x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{\frac{-1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{4}+1}}{\frac{-1}{4}+1} + C = \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + \mathrm{C} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \mathrm{C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{\frac{-2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

Integrales de potencias

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n \cdot u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Ejemplos

$$\int \frac{1}{x^2\,\sqrt[5]{x^2}}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2\,\sqrt[5]{x^2}}dx = \int x^{-2}\,x^{\frac{-2}{5}}dx = \int x^{\frac{-12}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{-12}{5}+1}}{\frac{-12}{5}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{-7}{5}}}{\frac{-7}{5}} + C = -\frac{5}{7\sqrt[5]{x^7}} + C$$

$$\int (x+2)^3\,dx$$

$$\int (x+2)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+2)^4 + C$$

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)dx$$

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)dx = \frac{1}{2}(x^2+x+1)^2 + C$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+7}}dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+7}}dx = \frac{1}{2}\int (2x+2)(x^2+2x+7)^{\frac{-1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(x^2 + 2x + 7\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x^2 + 2x + 7\right)^2} + C$$

$$\int sen\, 2x \ \cos 2x\, dx$$

$$\int sen\, 2x \ \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int sen\, 2x \ \cos 2x \cdot 2\, dx = \frac{1}{4} sen^2\, 2x \ + \ C$$

$$\int \text{sen}^4 x \cos x\, dx =$$

$$\int \text{sen}^4 x \cos x\, dx = \frac{1}{5}\text{sen}^5\, x + \text{C}$$

$$\int \text{tg}^2 x \ \sec^2 x\, dx$$

$$\int \text{tg}^2 x \ \sec^2 x\, dx = \frac{1}{3}\text{tg}^3 x + \text{C}$$

$$\int \frac{arc\ tg\ x}{1 + x^2} dx$$

$$\int \frac{arc\ tg\ x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2}\left(arc\ tg\ x\right)^2 + \text{C}$$

Integral exponencial

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + \text{C}$$

$$\int e^x\ dx = e^x + \text{C}$$

$$\int a^u \cdot u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + \text{C}$$

$$\int e^u \cdot u'\, dx = e^u + \text{C}$$

Ejemplos

$$\int e^{2x+2}\,dx$$

$$\int e^{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+2} + C$$

$$\int 5^x\,dx$$

$$\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5}$$

$$\int 2^x\,5^x\,dx$$

$$\int 2^x\,5^x\,dx = \int 10^x\,dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

$$\int 8^{3x+1}\,dx$$

$$\int 8^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int 8^{3x+1}\,3\,dx = \frac{1}{3\ \ln 8}8^{3x+1} + C$$

$$\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$$

$$\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}\,e^{\ln x}\,dx = e^{\ln x} + C$$

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$$

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,sen} x}dx = e^{\operatorname{arc\,sen} x} + C$$

Ejercitando mi habilidad.

Integrales de monomios y polinomios.

Resuelve en tu cuaderno las siguientes integrales, anota en él, todo procedimiento y relaciona las columnas.

Ejercicios

$$\int\left(5x^3-\frac{x^2}{3}+4x+4\right)dx$$

$$\int\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{3}-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$$

$$\int\left(x^4+2x^2\right)^3\,dx$$

$$\int x^4\left(2x^3-5x^4\right)dx$$

$$\int\frac{x^3+3x^4}{x^2}\,dx$$

$$\int\left(x^3+x^2-x\right)^2dx$$

$$\int x\left(8x^3+20\right)^2\,dx$$

$$\int\frac{x^6-x^3-2x^5+12x^2-30}{x^3-6}\,dx$$

Posibles respuestas

$$-\frac{5}{9}x^9+\frac{1}{4}x^8+c$$

$$x^3+\frac{1}{2}x^2+c$$

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+5x+c$$

$$\frac{5}{4}x^4-\frac{1}{9}x^3+2x^2+4x+c$$

$$\frac{5}{18}x^{6/5}-\frac{15}{4}x^{4/5}+c$$

$$\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+c$$

$$8x^8+64x^5+200x^2+c$$

$$\frac{1}{13}x^{13}+\frac{6}{11}x^{11}+\frac{4}{3}x^9+\frac{8}{7}x^7+c$$

Ejercitando mi habilidad.

Integrales de la forma. $\int v^n \, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$

Ejercicios

$$\int (x^7 - 2x^5)(7x^6 - 10x^4)\,dx =$$

$$\int \frac{(x^{-1}+3)^2}{-x^2}\,dx =$$

$$\int (x^3 + x)^3 (3x^2 + 1)\,dx =$$

$$\int (x^2 + x)^5 (2x + 1)\,dx =$$

$$\int (5x^2 + 4x^3 - 5x^4)^6 (10x + 12x^2 - 20x^3)\,dx =$$

$$\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\,dx =$$

$$\int 4x(x^2 + 9)^{11}\,dx =$$

$$\int \frac{2}{\sqrt[3]{8x - 2}}\,dx =$$

$$\int \frac{(15x^2 + 5)}{(x^3 + x)^9}\,dx =$$

$$\int \frac{5(\sqrt[3]{x} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$$

Respuestas

$$-\frac{5}{8(x^3 + x)^8} + c$$

$$\frac{(x^2 + x)^6}{6} + c$$

$$\frac{(x^3 + x)^4}{4} + c \quad \text{o} \quad \frac{x^4}{4} + x^6 + \frac{3x^8}{2} + x^{10} + \frac{x^{12}}{4} + c$$

$$\frac{(5x^2 + 4x^3 - 5x^4)^7}{7} + c$$

$$3(\sqrt[3]{x} + 2)^5 + c$$

$$\frac{(x^{-1} + 3)^3}{3} + c \quad \text{o} \quad \frac{1}{3x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{9}{x} + c$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{(1 + 4x + 2x^3)^3} + c$$

$$\frac{1}{6}(9 + x^2)^{12} + c$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(8x - 2)^2} + c$$

$$\left(\frac{x^7 - 2x^5}{2}\right)^2 + c \quad \text{ó} \quad 2x^{10} - 2x^{12} + \frac{x^{14}}{2} + c$$

Ejercitando mi habilidad.

Integrales de la forma. $$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c$$

Ejercicios	Respuestas
$\int \frac{30x^5 + 48x^7}{5x^6 + 6x^8 + 9}\, dx$	$\frac{1}{6}\ln\left(2x^3 + 9x^2 + 12x - 1\right)$
$\int \frac{5x^4 - 12x^3}{x^5 - 3x^4 - 5}\, dx$	$5\ln(x - 7)$
$\int \frac{1}{x - 1}\, dx$	$\ln\left(x^5 - 3x^4 - 5\right)$
$\int \frac{5}{x - 7}\, dx$	$\frac{1}{9}\ln\left(x^9 - 16\right)$
$\int \frac{x^8}{x^9 - 16}\, dx$	$\frac{1}{6}\ln\left(6 + 3x^2 + 8x^3\right)$
$\int \frac{x + 4x^2}{6 + 3x^2 + 8x^3}\, dx$	$\ln\left(5x^6 + 6x^8 + 9\right)$
$\int \frac{16x^3 + 16}{x^4 + 4x + 1}\, dx$	$4\ln\left(x^4 + 4x + 1\right)$
$\int \frac{(x + 1)(x + 2)}{2x^3 + 9x^2 + 12x - 1}\, dx$	$2x - \ln(x + 3)$
$\int \frac{2x + 5}{x + 3}\, dx$	$x^2 + \frac{3}{4}x^4 - \ln\left(x^2 + 4\right)$
$\int \frac{6x + 14x^3 + 3x^5}{x^2 + 4}\, dx$	$\ln(x - 1)$

Ejercitando mi habilidad.

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}ArcTg\frac{v}{a}+c \qquad \int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=ArcSen\frac{v}{a}+c \qquad \int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}}=\frac{1}{a}ArcSec\frac{v}{a}+c$$

Ejercicios

$$\int \frac{1}{x^2+49}\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^4+81}\,dx$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$$

$$\int \frac{2}{2x\sqrt{4x^2-4}}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^3\sqrt{9x^6+4}}\,dx \qquad \int \frac{x^5}{x^{12}+25}\,dx$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+4}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2}{x^6+4x^3+8}\,dx$$

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}-9)\sqrt{x^{20}-18x^{10}+65}}\,dx$$

Respuestas

$$x^3-9x+\frac{37}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\arctan(x)+\arcsin(x)$$

$$\frac{1}{6}arc\sec\frac{3x^3}{2}$$

$$x+2\arctan(x)$$

$$\frac{1}{2}arc\sec x$$

$$\frac{1}{30}\arctan\left(\frac{1}{5}x^6\right)$$

$$5\arcsin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$\frac{1}{7}\arctan\left(\frac{1}{7}x\right)$$

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x^3+1\right)$$

$$\frac{1}{18}\arctan\left(\frac{1}{9}x^2\right)$$

$$\arcsin(x^3)$$

UNIDAD III

UNIDAD III.

CAMBIO Y ACUMULACIÓN.

Rescatando mis Aprendizaje.

Resuelve las siguientes integrales

1. $\int \frac{(7x^2-9x+5)}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx$

3. $\int \frac{(x+4)}{3x-5}dx$

4. $\int \left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)^2 dx$

5. $\int (\sec x-\tan x)^2\, dx$

6. $\int \frac{dy}{\sqrt{36-y^2}}$

7. $\int \frac{dx}{25x^2-16}$

8. $\int \sec^4 x\, dx$

8. $\int e^x\, Sen\, 2x\, dx$

9. $\int x^2\, Cos\, x\, dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=$

11. $\int \tan^3 x\, dx=$

12. $\int \frac{dx}{4x-x^2}=$

Para aprender más

LA INTEGRAL INDEFINIDA Y DEFINIDA

INTEGRACIÓN POR PARTES:

La integración por partes (I.P.P. en abreviado) es un método para calcular una integral de una función cuyas primitivas se desconocen, y consiste en utilizar el teorema siguiente: Sean u y v dos funciones reales de clase C (es decir derivable y de derivada continua) definidas sobre el intervalo [a; b].

Se llama integración por partes, porque la integral se divide en dos partes una u y otra dv. Fuente: Flores, Valencia y García, (2014), Fundamentos del Cálculo, México.

La integral debe estar completa y sin alterar la operación dentro de ella. Esta selección es lo más importante y se debe realizar de la siguiente manera:

- En la parte que corresponde a dv debe ser la función más fácil de integrar,
- En u deben ir aquellas funciones que no tienen integral directa (funciones logarítmicas e inversas), luego se pueden considerar las funciones algebraicas puesto que la derivada es reductiva.

El método de integración por partes está basado en la derivada de un producto de funciones como se muestra a continuación:

$$d(u.v) = u\,dv + v\,du$$

Por eso es que se usa para integrales que contienen dos funciones que se multiplican entre sí.

$\int d(u.v) = \int u\,dv + \int v\,du$ **(se integra en ambos lados de la fórmula)**

$(\boldsymbol{u.v}) = \int \boldsymbol{u\,dv} + \int \boldsymbol{v\,du}$ **(resolviendo la integral)**

Despejando, Queda La Fórmula De La Integración Por Partes

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{u\,v} - \int \boldsymbol{v\,du}$$

Procedimiento de solución:

$$\int \boldsymbol{x^2 \ln x\ dx}$$

1. Cuando se tiene un producto de una función logarítmica inclusive afectada de un exponente por una expresión x, se toma así:

$$\{\boldsymbol{u = \ln x \ \ dv = x^2 dx} \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{du = \frac{dx}{x} \ \ v = \frac{x^3}{3}}$$

2. Reemplazamos en la fórmula de integración por partes:

$$\int \boldsymbol{x^2 \ln \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln \ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}}$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{\frac{x^3}{3} \ln \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln \ln x}{3} \frac{x^3}{9} + c}$$

Ejemplos*:*

1) $\int \boldsymbol{x \cos \cos x\, dx}$

u= x u' =1

v' = cos x v= sen x

$$\int x \cos x\, dx = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + \cos \cos x + C$$

2) $\int \quad x^3e^{x^2}dx$

u= x^2 ***dv=*** $e^{x^2}xdx$

du = 2xdx ***v=*** $\frac{1}{2}e^{x^2}$

$$\int \quad x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int \quad xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

3) $\int \quad x2^{-x}dx$

u= x ***dv =*** 2^{-x}***dx***

du= dx ***v=*** $-\frac{2^{-x}}{ln2}$

$$\int \quad x2^{-x}dx = x\frac{2^{-x}}{ln2}\int \quad -\frac{2^{-x}}{ln2}dx = -x\frac{2^{-x}}{ln2} - \frac{2^{-x}}{ln^2 2} + C = -\frac{xln2+1}{2^x ln^2 2}$$

Ejercitando mi habilidad.

En los ejercicios siguientes efectúe la integral definida.

1. $\int \ln x dx$	**2.** $\int xe^{3x}dx$	**3.** $\int \cos\sqrt{x}dx$
4. $\int xe^{-x}dx$	**5.** $\int x\sec x\tan x dx$	**6.** $\int (\ln x)^2 dx$
7. $\int x^2\ln x dx$	**8.** $\int e^x \cos x dx$	**9.** $\int \cos^2 x dx$
10. $\int 3x\cos 2x dx$	**11.** $\int (e^x + 2x)^2 dx$	**12.** $\int x\,\text{sen}\, x dx$

Para aprender más.

DEFINICIONES E IMPORTANCIA DE: INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN VARIOS AUTORES.

La integran definida tiene varios conceptos pero se presentan 3 a continuación: Sea f: [a,b] $\Rightarrow$ R una función real, continua no negativa ; sea P una participación de [a,b] compuesta por los puntos a= $x_0 < x_1 <..< x_n = b$ y sea x^*i un punto arbitrario en $\lfloor x_i - 1; x_i \rfloor$ para cada i=1,2,….,n. Al número.

$$S(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{P}, \{\boldsymbol{x}_i^*\}) = \sum \quad \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_i^*)(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i - \mathbf{1})$$

Se le llama suma de Riemann correspondiente a la partición P y a la elección de puntos intermedios $\{x_i^*\}\frac{k}{i=1}$

Fuente: Flores, Valencia y García, (2014), Fundamentos del Cálculo, México.

Para cada función f:[a,b] $\Rightarrow$ *R continua, se define la integral de f en el intervalo [a,b] como el número real* $\int_a^b \quad f(x)dx$ *dado por*

$$\int_a^b \quad f(x)dx = \; S(f, Pn, \{x_i^{n*}\})$$

y se lee "integral de *f* entre *a* y *b*". La función *f* es el integrando y los extremos de integración *a* y *b* se llaman límites inferior y superior de la integral respectivamente. Esta es la definición de integral definida según Riemann.

Así debe quedar claro que una integral definida no es sino una suma de infinitos términos, pero igualmente aplicable para aproximar sumas de muchos términos que resultarían excesivamente laboriosas, prácticamente imposible, realizarlas manualmente.

Fuente: Morales Álvarez, Felicitas (2014), Calculo Integral, México, D.F: Pearson.

La Integral de Darboux se define en términos de sumas de los siguientes tipos:

$$\mathbf{L(f,P)} = \sum \mathbf{mi}(x_i - x_i - 1)\ ,\ \mathbf{U(f,P)} = = \sum_i^n \quad (Mi(x_i - x_i - 1))$$

Llamadas suma inferior y superior respectivamente, donde:

$$\boldsymbol{M_i = sup\{f(x) \mid x \text{€} [x_i - 1, x_i]}, \qquad \boldsymbol{m_i = inf\{f(x) \mid x \text{ € } [x_i - 1, x_i]\}}$$

Son las alturas de los rectángulos, y x_i-x_{i-1} la longitud de la base de los rectángulos. La integral de Darboux está definida como el único número acotado entre las sumas inferior y superior, es decir,

$$\mathbf{L(f,P)} \leq \int_a^b \quad f \leq U(f,P)$$

La interpretación geométrica de la integral de Darboux sería el cálculo del área de la región en [*a*,*b*] por el **Método exhaustivo**. La *integral de Darboux* de una función *f* en [*a*,*b*] existe *si y solo si:*

Sup{ L (f,P) = inf{U(f,P)}

Del Teorema de Caracterización que dice que si *f* es integrable en [*a*,*b*] entonces ∀ε>0 ∃ *P* partición de [*a*,*b*] : 0≤U(*f*,*P*)-L(*f*,*P*)≤ε, evidencia la equivalencia entre las definiciones de Integral de Riemman e Integral de Darboux pues se sigue que:

$$\int_{a}^{b} f - \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \triangle i \leq U(f,P) \leq \varepsilon$$

Definiciones de: El teorema fundamental del cálculo integral.

El teorema fundamental del cálculo integral.

Según Dora Cienfuegos este teorema establece la relación entre $\int_a^b f(x)dx$ e $\int f(x)dx$, entre la integral definida y la indefinida. Lo podemos enunciar como sigue:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F8x)]\frac{a}{b} = F(b) - F(a)\,;(F'(x) = f(x)$$

La igualdad anterior se conoce como la regla de Barrow y da el procedimiento para calcular una integral definida.

Según Rubén Espinoza es un proceso difícil de implementar pues se requiere tomar en cuenta el comportamiento de la función a lo largo de todo el intervalo de integración. Sin embargo, cuando se conoce una primitiva o una antiderivada de la función, el cálculo de la integral en el intervalo se reduce a una mera evaluación de esa primitiva en sus extremos, tal como se muestra en la proposición siguiente.

Sea $f\colon[a,b] \to R$ continua y sea $g\colon[a,b] \to R$ una antiderivada de f, es decir $\frac{dg}{dx}(x) = f(x)$. Entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{dg}{dx}(x)dx = g(b) - g(a)$$

Entonces la función será:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Según Felicitas Morales analizando $\boldsymbol{f(x) = \int_0^x \quad f \rightarrow F' = f = g'}$ sobre $[\boldsymbol{a, b}]$**,** $\exists$ un número C tal que $\boldsymbol{F = g + C}$

$$F(a) = g(a) + C \qquad \textbf{si} \qquad F(a) = 0 \qquad \rightarrow \qquad g(a) = -C$$

Así, $F(x) = g(x) - g(a)$

Lo cual se cumple para x=b

$$\boldsymbol{\int_a^b \quad f = F(b) = g(b) - g(a)}$$

Después de analizar estas teorías podemos decir que el teorema fundamental del cálculo integral es el que nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{\int_0^1 \quad xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]\frac{1}{0} = \frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}}$$

Áreas de regiones planas

Según Eduardo Espinoza en el cálculo de área de regiones planas se consideran dos casos:

Primer caso: consideremos una función $\boldsymbol{y = f(x)}$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y además $f(x) \geq 0$, $\forall x \varepsilon [a, b]$. El área de la región R limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$; esta dado por la expresión:

$$\boldsymbol{A(R) = \int_a^b \quad f(x)dx}$$

Segundo caso: consideremos dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, el area de la región R limitada por las curvas $\boldsymbol{y = f(x)}$; $\boldsymbol{y = g(x)}$ y las rectas $\boldsymbol{x = a}$ y $\boldsymbol{x = b}$, esta dado por la expresión.

$$\boldsymbol{A(R) = \int_a^b \quad (f(x) - g(x))dx}$$

Calcular el área de a figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de abscisas.

Procedimiento de solución de una región plana:

Como $\boldsymbol{y = 4x - x^2 \ \rightarrow \ y - 4 = -(x-2)^2}$, es una parábola de vértice en el punto $V(2{,}4)$

$$\boldsymbol{A(R) = \int_0^4 \quad ydx = \int_0^4 \quad (4x - x^2)dx}$$

$$\boldsymbol{= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) 4\ 0 \ = \frac{32}{3} u^2}$$

Según Dora Cienfuegos en general, para calcular el área de una región plana:

1. La dividimos en franjas, infinitamente estrechas, de manera horizontal o vertical.
2. Suponemos que las franjas son rectángulos, con lo cual su área se obtendrá como el producto de la base por la altura (la base será el diferencial correspondiente) dx o dy, es decir:
3.

$$d(a) = hdx \textbf{ o bien } d(a) = hdy$$

4. Calculamos el área total como la suma de las áreas de los infinitos rectángulos:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b \quad da}$$

Según Felicitas Morales para calcular el área de una región plana que se encuentra bajo una función y sobre el eje X se utiliza la integral definida de dicha función.

Es bueno aclarar que cuando aplicamos la integral definida en las áreas que están ubicadas sobre el eje X el resultado lo obtendremos con signo positivo, mientras que en las áreas que están debajo del eje X el resultado lo obtendremos con signo negativo. Esta consideración no representa ningún problema en el cálculo del área. Simplemente este signo negativo nos indica que es un área que está debajo del eje X, pero el área es la cantidad calculada con signo positivo.

Ejemplos:

1. Hallar el área de la figura comprendida entre la hipérbola $\mathbf{xy = m^2}$, las rectas verticales $\mathbf{x = a, X = 3a(a > 0)}$ y el eje $\mathbf{X}$.

Solución

$$xy = m^2 \rightarrow y = \frac{m^2}{x}$$

$$A(R) = \int_a^{3a} ydx = \int_a^{3a} \frac{m^2}{x}dx = m^2 \ln \ln x \,|3a\ a$$

$$A(R) = m^2 \ln \ln 3a - m^2 \ln \ln a$$

$$A(R) = m^2 \ln \ln 3u^2$$

2. Encontrar el área acotada por las curvas cuyas ecuaciones son $y = e^x$, y $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución:

$$A(R) = \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = (e^x - e^{-x})|1\ 0 = e + e^{-1} - 2$$

$$= 2\frac{e + e^{-x}}{2} - 1 = 2(\cos\cos 1 - 1)$$

$$A(R) = 2(\cos\cos 1 - 1)u^2$$

3. Calcular el área de la figura limitada por las líneas cuyas ecuaciones son $y^2 = x + 1$**,** $x - y - 1 = 0$**.**

Solución:

$$\{y^2 = x + 1\ x - y - 1 = 0 \rightarrow \{y^2 - 1 - y - 1 = 0\ y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0 \rightarrow Y = -1, y = 2$$

$$A(R) = \int_{-1}^{2} [(y + 1) - (y^2 - 1)dy$$

$$= \int_{-1}^{2} (-y^2 + y + 2)dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\right)2\ -1$$

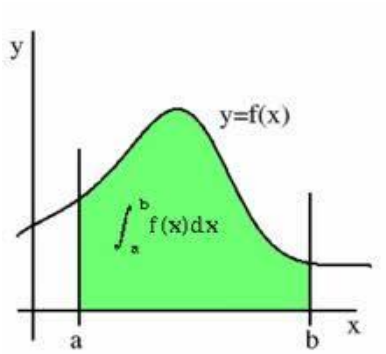
$$A(R) = \frac{9}{2}u^2$$

El área bajo la curva:

Felicitas Morales Álvarez, cálculo integral; es una función positiva con intervalo cerrado, f(x) deber ser continua se da por encima del eje “x”, tiene dos rectas verticales a y b.

Fórmula:

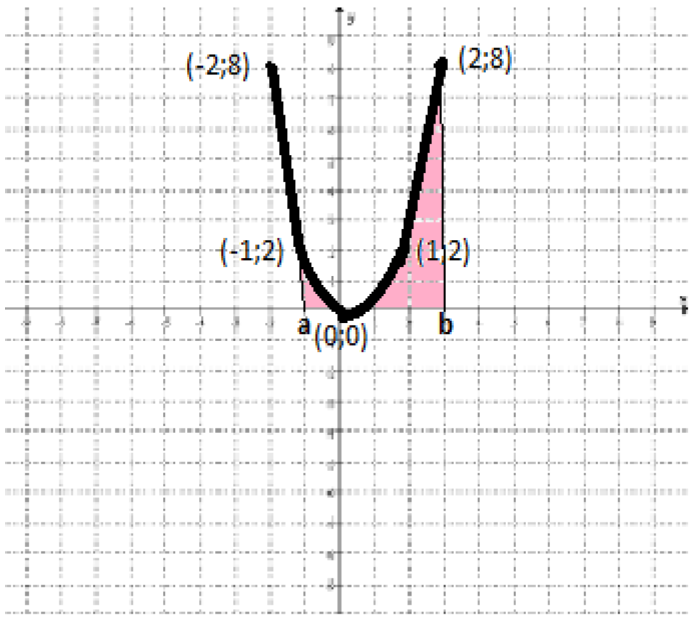
$$\boldsymbol{A = \int_{a}^{b} f(x)dx}$$



Ejercicios:

1. $\int_{1}^{2} (2x^2)dx$

X	**Y**
2	**8**
0	**0**
-1	**2**
-2	**8**



$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[\frac{2^3 + 1^3}{3}\right] = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Delta = \boldsymbol{3\ UC}$$

2. $\int_{-1}^{2} \quad (9 - x^2) - (x + 1)dx$

$$\int_{-1}^{2} \quad (8 - x - x^2)dx$$

$$\left[8x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left[\left(8(2) - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(8(-1) - \frac{1^2}{2} - \right)\right]$$

$$= \left[16 - 2 - \frac{8}{3}\right] - \left[8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 22 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{29}{2}$$

$$= \frac{29}{2}\ UC$$

3. $\int_{0}^{2} \quad (2 - 3x + 4x^2)dx$

$$\left[2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\left(2(2) - \frac{3(2)^2}{2} + \frac{4(2)^3}{3}\right) - \left(2(0) - \frac{3(0)^2}{2} + \frac{4(0)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \left[4 - \frac{12}{2} + \frac{32}{3}\right]$$

$$= \left(4 - 6 + \frac{32}{3}\right)$$

$$= \frac{26}{3}\ UC$$

Área entre curvas.

Según **Felicitas Morales** suponga que un área está contenida entre dos curvas $y = f(x)$ **y** $y = g(x)$**.**

Entonces es posible calcular el área bajo $y = f(x)$ o $y = g(x)$, mediante el cálculo de sus integrales y tomando su diferencia.

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{f(x)dx} - \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{g(x)dx}$$

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{(f(x)dx - g(x))dx}$$

Procedimiento de solución de área entre curvas.

Hallar el área de la región que está limitada bajo la curva $f(x) = -x^2 + 6$ y arriba de la curva $g(x) = -x^2 - 2x + 2$

En primer lugar debemos encontrar los puntos de intersección de las curvas, igualando $f(x) = g(x)$

$$\boldsymbol{-x^2 + 6 = x^2 - 2x + 2}$$

$$\boldsymbol{2x^2 - 2x - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{(x + 1)(x - 2) = 0}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -1\ ;\ x_2 = 2}$$

Dados los puntos de intersección $x = -1\ y\ 2$, ahora puede integrar $f(x) - g(x)$ entre estos limites para encontrar el area entre las curvas, de la siguiente manera:

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \int_{-1}^{2} \boldsymbol{\left((-x^2 + 6) - (x^2 - 2x + 2)\right)dx}$$

$$= \int_{-1}^{2} \boldsymbol{(-2x^2 + 2x + 4)dx}$$

$$\boldsymbol{\left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right] 2\ \ -1}$$

$$= 9$$

Según **Dora Cienfuegos** el área de la región limitada por las curvas $y = f_1(x) e\ Y = f_2(x)$, siendo $f_1(x) \leq f_2(x)$ y por las rectas $x = a\ y\ x = b$ viene definida por la integral.

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

Ejemplos

1. **Hallar el área limitada por las curvas** $y = 2 - x^2\ y\ \ y = -x$

Solución

$$Área = \int_{-1}^{2} \left((2 - x^2) - (-x)\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)dx$$

$$= 2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x[2 \ -1$$

$$= \frac{9}{2}$$

2. **Hallar el área limitada por las curvas** $y = x^2 - 4,\ \ y = 2, x = 4$

$$y = x^2 - 4\ y\ y = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = -2\ ;\ x = 2$$

$$= \int_2^4 (x^2 - 4)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) 4\ 2$$

$$= \left(\frac{1}{3}(4^3) - 4(4)\right) - \left(\frac{1}{3}(2^2) - 4(2)\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} - 8$$

$$= \frac{56}{3} - 8$$

$$= \frac{32}{3}$$

3. Hallar el área limitada por las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x = x \;\rightarrow\; x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

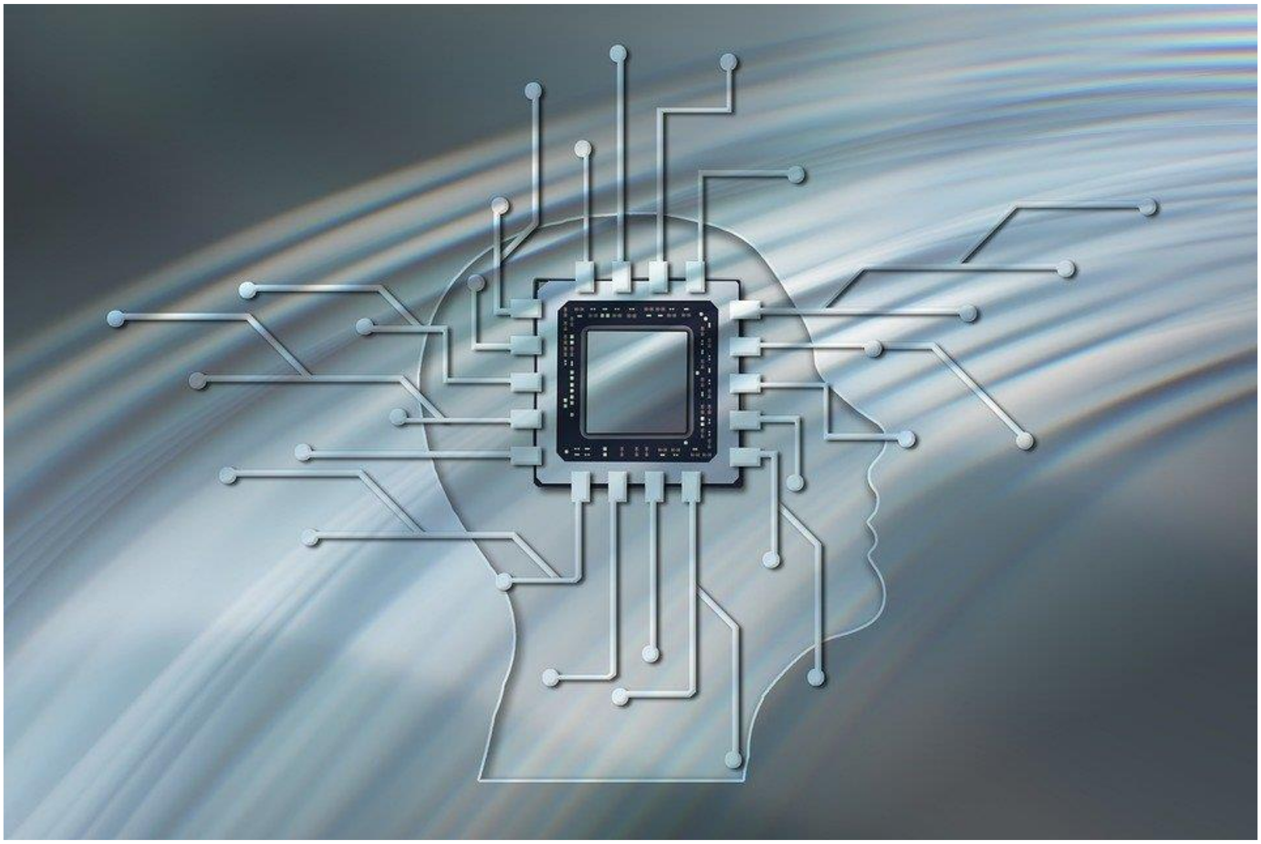
$$x = 0\,;x = 1\,;\; x = 2$$

$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - x$$

$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{1}{2}u^2$$

Fuente: Imagen recuperada de www.pixabay.com junio 2020



Ejercitando mi habilidad.

Ejercicio 1.

Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (2x-3)dx$

b) $\int_1^2 \frac{5-x}{x^3} dx$

c) $\int_1^5 2\sqrt{x-1}\, dx$

d) $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

e) $\int_{-2}^0 (x-2)(x+1)dx$

f) $\int_0^4 \left(1+2\sqrt{x}\right)^2 dx$

g) $\int_0^1 (2a+1)^4\, da$

h) $\int_1^e x.\ln x\, dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$

j) $\int_0^3 (-x^2+x-1)dx$

k) $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}t-2\right)^2 dt$

l) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{9+2x}$

Ejercicio 2.

Grafique la región limitada por las curvas y calcule el área determinada por ambas.

a) $y = x^2$ con la recta $y = 2x + 3$

b) el eje de abscisas, la recta $y = x + 1$ y la recta $x = 4$

c) el eje de abscisas, la curva $y = x^2 - 1$ y la recta $x = 2$

d) $y = x^2 + 2x - 1$ con la recta $y = - x - 1$

e) $y^2 = 4x$ con la recta $y = 2x - 4$

f) $y = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 10$

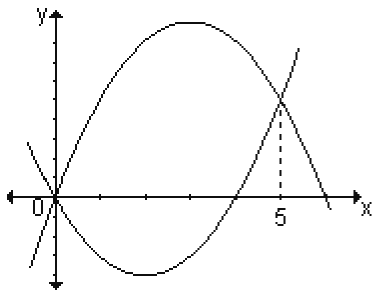
g) $y = x^2$ con la recta $y = 3 - 2x$

h) $y = \sqrt{x}$ con $y = x^2$

i) $y = 4 - x^2$ con la recta $y = x + 2$

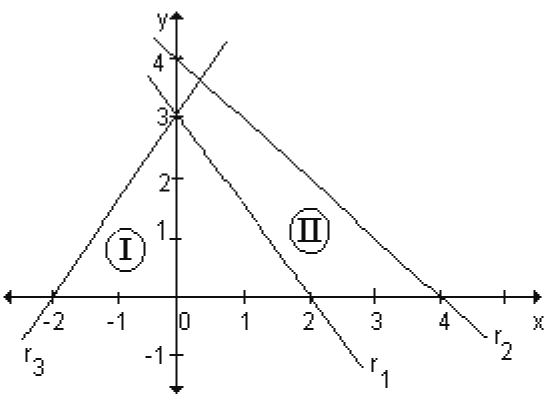
Ejercicio 3.

Halle el área encerrada por las curvas $y = x^2 - 4x$ e $y = 6x - x^2$. Grafique.



el área vale:

Ejercicio 4.



Dada la siguiente gráfica, halle:

a) las ecuaciones de las rectas

b) el área de las zonas I y II indicadas en el gráfico.

Respuesta

a) $r_1 : y = 3 - \frac{3}{2}x ; r_2 : y = -x + 4 ; r_3 : y = \frac{3}{2}x + 3$ **b)** ***AI= 6 AII =*** $\frac{24}{5}$

Ejercicio 5.

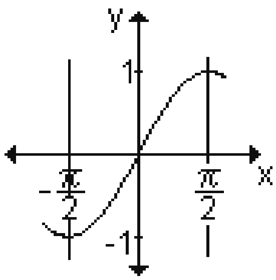
a) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx$

b) Determine el área de la región comprendida entre la curva y = sen x, el eje x y las rectas **x = -** $\frac{\pi}{2}$ y **x =** $\frac{\pi}{2}$**.**

Grafique.

c) Analice por qué no se obtiene el mismo resultado en a) y b).

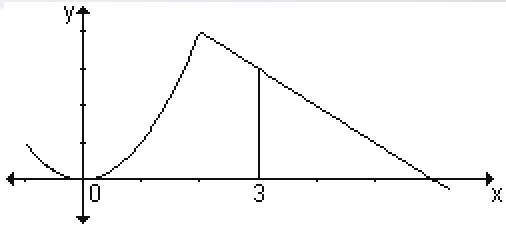
Respuesta:



Ejercicio 6.

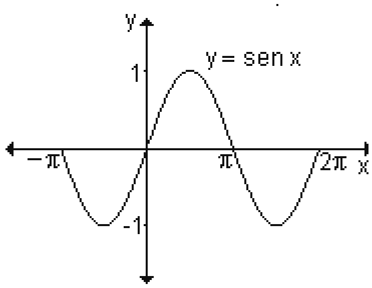
Calcule el área bajo la curva f(x)= $\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **. Interprete gráficamente.**

Respuesta:



Ejercicio 7.

Escriba la integral definida que proporciona el área de la región (no calcule el valor del área)

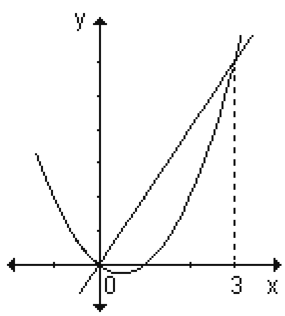


Respuesta: **A =**

Ejercicio 8

Halle el área limitada por la parábola $y = x^2 - x$ y la recta que une los puntos P(1, 2) y Q(- 3, - 6).

Grafique.



Respuesta:

Ejercicio 9.

Halle, utilizando integrales, el área del triángulo limitado por las rectas de ecuación y - 3x = 0; x - 3y = 0 y x + y = 4.

Respuesta:

el área vale 4

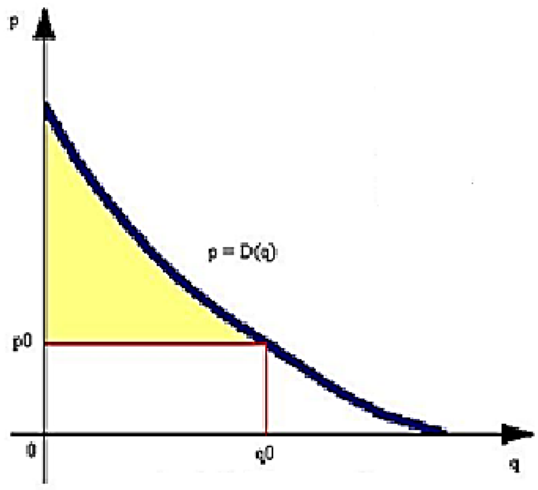
Para aprender más.

EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR.

Es la ganancia monetaria que recibe el consumidor al adquirir un bien o servicio o un precio menor al expuesto por el mercado, es decir, es la diferencia entre la posibilidad de gastar y el gasto real por las (q) unidades.

Gráfica:

$$EC = \int_0^{Xd} f(x)dx - [(X_0 X P_0)]$$



Ejemplos:

1. $y = -4x^2 - 6x + 60$

$y = -4(3)^2 - 6(3) + 6$

Y = 6

$$EC = \int_0^3 (-4x^2 - 6x + 60)dx - [(3)(6)]$$

$$= \int -4x^2 dx - \int 6x dx + \int 60dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 60x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{4(3)^3}{3} - \frac{6(3)^2}{2} + 60(3)\right]$$

$$= -\frac{103}{3} - 27 + 180 = \frac{256}{3}$$

EC = $\frac{256}{3}$

2. $y = 2x^2 + x + 20$

$y = 2(3)^2 + 3 + 20$

.y =**41**

$$EC = \int_0^3 (2x^2 + x + 20)dx - [(2)(41)]$$

$$= \int 2x^2 dx + 1\int xdx + \int 20dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 20x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{2(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 20(3)\right]$$

EC$= 18 + \frac{9}{2} + 60$

EC $= \frac{165}{2}$

3. $y = 4x^2 - 3x + 4$

$y = 4(1)^2 - 3(1) + 4$

$y = 5$

$$EC = \int_0^1 (4x^2 - 3x + 4)dx - [(1)(5)]$$

$$\int 4x^2dx + \int 3xdx + \int 4dx$$

$$\left[\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 20x\right]_0^1$$

$$\left[\frac{4(1)^3}{3} + \frac{3(1)^2}{2} + 4(1)\right]$$

$$EC = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + 4$$

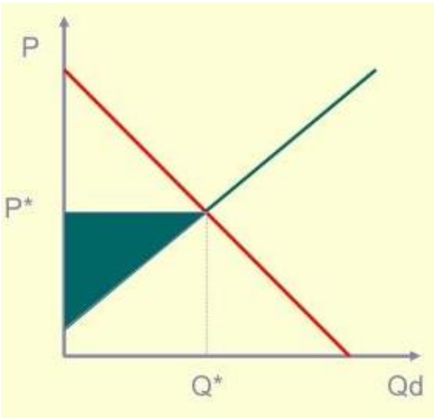
$$EC = \frac{41}{6}$$

EXCEDENTE DEL PRODUCTOR.

Cuando los productores están dispuestos a ofrecer algo por debajo del precio de mercado P_0 que puede demandar unidades de mercado X_0 aquellos vendedores que ofrecen por debajo del mercado se ubican en el excedente del productor.

Gráfica:

$$\boldsymbol{EP = \lfloor (X_0)(P_0) \rfloor - \int_0^{Xo} f(x)dx}$$



Ejemplos:

1. $y = x^2 - 2x + 2$

$$y = (4)^2 - 2(4) + 2$$

$$.y = 10$$

$$Ep = \lfloor (10)(4) \rfloor - \int_0^4 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$\int x^2 dx + \int 2xdx + \int 2dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 2x\right]_0^4$$

$$=\left[\frac{(4)^3}{3} + \frac{2(4)^2}{2} + 2(4)\right]$$

$$Ep = \frac{64}{3} + \frac{32}{2} + 8$$

$$Ep = \frac{136}{3}$$

2. $y = 9x^2 - 4x + 1$

$$.y = 9(2)^2 + 4(2) + 1$$

$$y = 45$$

$$Ep = \lfloor (45)(2) \rfloor - \int_0^2 (9x^2 + 4x + 1)dx$$

$$\int 9x^2 dx + \int 4xdx + \int 1dx$$

$$\left[\frac{9x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x\right]_0^4$$

$$Ep = (3(4)^2 + 2(4)^2 + 4$$

$$Ep = 84$$

3. $y = 5x^2 - 5x + 1$

$$.y = 5(1)^2 + 5(1) + 1$$

$$.y = 11$$

$$.Ep = \lfloor (11)(1) \rfloor - \int_0^1 (5x^2 - 5x + 1)dx$$

$$=\int 5x^2dx + \int 5xdx + \int 1dx$$

$$= \left[\frac{5x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 1\right]_0^1$$

$$Ep = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 1$$

$$Ep = \frac{31}{6}$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO.

En esta página, se describe el movimiento más simple, el movimiento rectilíneo. Se introducen las magnitudes cinemáticas: posición, velocidad y aceleración.

Es importante diferenciar entre posición del móvil en un instante t y desplazamiento del móvil entre dos instantes: inicial t_0 y final t.

Se calcula la velocidad en un instante, a partir de las velocidades medias en intervalos de tiempo cada vez más pequeños lo que nos permite recordar el concepto de derivada de una función.

A partir de un registro de la velocidad en función del tiempo, se pide calcular el desplazamiento del móvil entre el instante inicial t_0 y el instante final t, lo que nos permite recordar el concepto de integral definida.

Finalmente, se estudian dos casos particulares:

- Movimiento rectilíneo uniforme
- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Cuyas ecuaciones son conocidas y se emplearán frecuentemente.

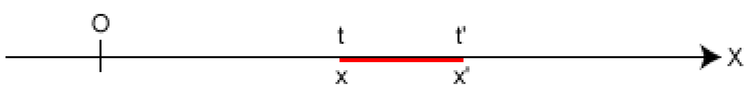
Magnitudes cinemáticas.

Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.

En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición del móvil *x* en el instante *t*. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

Posición

La posición *x* del móvil se relaciona con el tiempo *t* mediante una función *x=f(t)*.



Desplazamiento

Supongamos ahora que en el tiempo *t*, el móvil se encuentra en posición *x*, más tarde, en el instante *t'* el móvil se encontrará en la posición *x'*. Decimos que móvil se ha desplazado *Δx=x'-x* en el intervalo de tiempo *Δt=t'-t*, medido desde el instante *t* al instante *t'*.

Velocidad

La velocidad media entre los instantes *t* y *t'* está definida por

<v>=x'−xt'−t=ΔxΔt<v>=x'−xt'−t=ΔxΔt

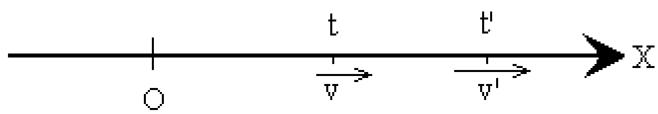
La velocidad media se calcula en un tiempo *Δt* finito. La velocidad (instantánea) en un intervalo de tiempo *Δt*→0

Para determinar la velocidad en el instante *t*, debemos hacer el intervalo de tiempo *Δt* tan pequeño como sea posible, en el límite cuando Δt tiende a cero.

v=limΔt→0ΔxΔt=dxdtv=lim⁡Δ t→0ΔxΔt=dxdt

Que es la definición de derivada de la función *x* con respecto del tiempo *t*.

Aceleración



En general, la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo. Supongamos que en un instante t la velocidad del móvil es v, y en el instante t' la velocidad del móvil es v'. Se denomina aceleración media entre los instantes t y t' al cociente entre el cambio de velocidad $\Delta v=v'-v$ y el intervalo de tiempo en el que se ha tardado en efectuar dicho cambio, $\Delta t=t'-t$.

<a>=v'−vt'−t=Δv/Δt<a>=v'−vt'−t=Δv/Δt

La aceleración en el instante t es el límite de la aceleración media cuando el intervalo Δt tiende a cero, que es la definición de la derivada de v.

a=limΔt→0ΔvΔt=dvdta=lim⁡Δ t→0ΔvΔt=dvdt

Ejemplo:

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta $x=2t^3-4t^2+5$ m. Hallar la expresión de

- La velocidad
- La aceleración del móvil en función del tiempo.

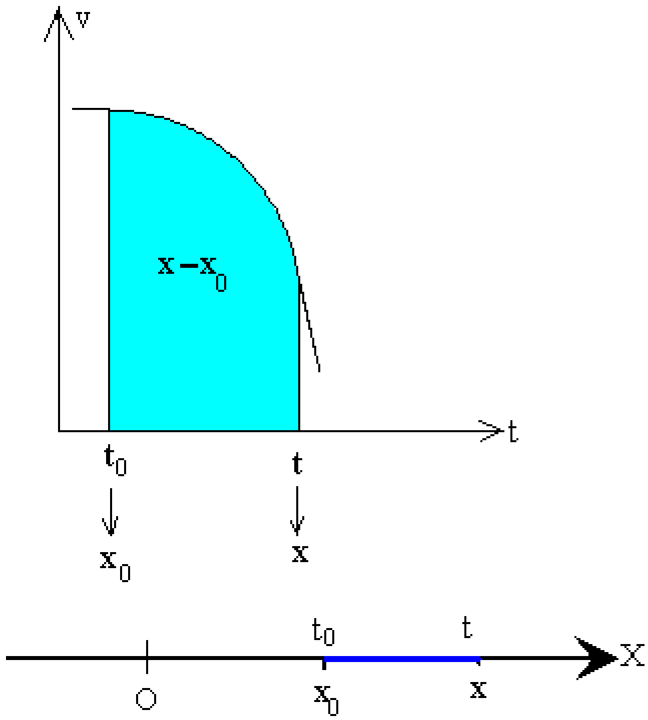
v=dx/dt=6t2−8tm/s

a=dv/dt=12t−8m/s2

v=dx/dt=6t2−8t m/s

a=dvdt=12t−8 m/s2

Dada la velocidad del móvil hallar el desplazamiento.



Si conocemos un registro de la velocidad, calculamos el desplazamiento x-x_0 del móvil entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

x−x0=t∫t0v·dt x−x0=∫t0tv·dt

El producto $v\,dt$ representa el desplazamiento del móvil entre los instantes t y $t+dt$, o en el intervalo dt. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos infinitesimales entre los instantes t_0 y t.

En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento total del móvil entre los instantes t_0 y t, el segmento en color azul marcado en la trayectoria recta.

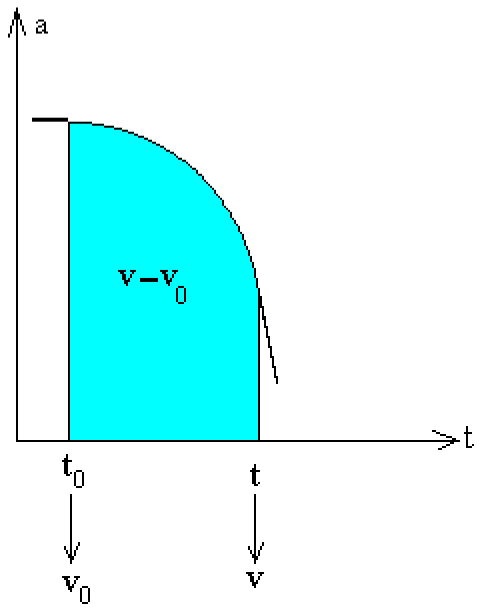
Hallamos la posición x del móvil en el instante t, sumando la posición inicial x_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva *v-t* o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

Ejemplo:

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ley $v=t^3-4t^2+5$ m/s. Si en el instante t_0=2 s. está situado en x_0=4 m del origen. Calcular la posición *x* del móvil en cualquier instante.

$$x-4=\int_2^t (t^2-4t^2+5)dtx = x=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+5x+\frac{2}{3}\text{ m}$$

Dada la aceleración del móvil hallar el cambio de velocidad.



Del mismo modo, que hemos calculado el desplazamiento del móvil entre los instantes t_0 y *t*, a partir de un registro de la velocidad *v* en función del tiempo *t*, calculamos el cambio de velocidad $v-v_0$ que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de un registro de la aceleración en función del tiempo.

$$v-v_0=\int_{t0}^{t} a\cdot d$$

En la figura, el cambio de velocidad $v-v_0$ es el área bajo la curva *a-t*, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

Conociendo el cambio de velocidad v-v_0, y el valor inicial v_0 en el instante t_0, calcula la velocidad v en el instante t.

Ejemplo:

La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta viene dada por la expresión. a=4-t^2 m/s^2. Sabiendo que en el instante t_0=3 s, la velocidad del móvil vale v_0=2 m/s. Determinar la expresión de la velocidad del móvil en cualquier instante

v−2=$\int_3^t \quad (4-t^2)dt$=

$$v = 4t - \frac{1}{3}t3 - 1 \quad m/s$$

Resumen.

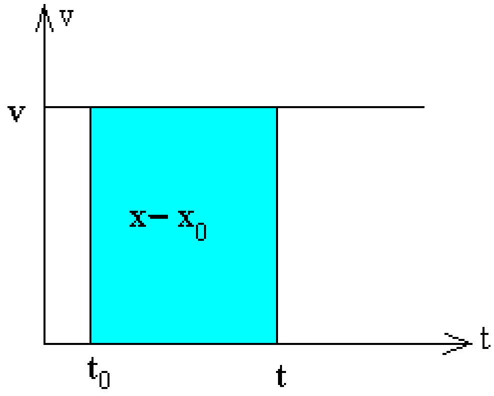
Las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento rectilíneo son:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a \cdot dt$$

Casos particulares

Movimiento rectilíneo uniforme



Un movimiento rectilíneo uniforme es aquél cuya velocidad es constante, por tanto, la aceleración es cero. Calculamos la posición *x* del móvil en el instante *t*, integrando

$$x - x0 = v \cdot (t - t0)$$

o gráficamente, en la representación de *v* en función de *t*.

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero, por lo que las ecuaciones del movimiento uniforme resultan

$$a = 0$$

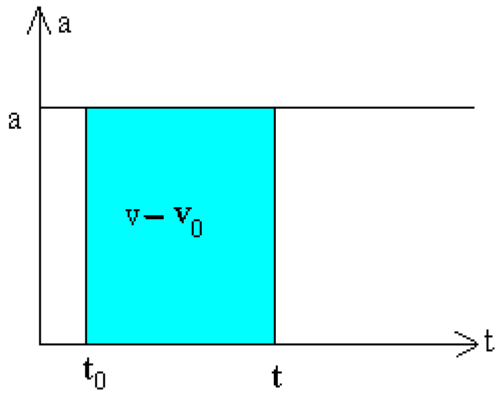
$$v = cte$$

$$x = x0 + v \cdot t$$

$$a = 0\ v = cte$$

$$x = xo + v \cdot t$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

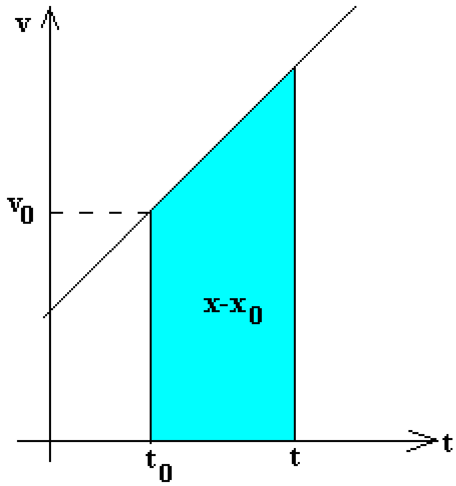


Un movimiento uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración es constante. Dada la aceleración, obtenemos el cambio de velocidad v-v_0 entre los instantes t_0 y *t*, mediante integración, o gráficamente.

$$v - v0 = a \cdot (t - t0)$$

Dada la velocidad en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento x-x_0 del móvil entre los instantes t_0 y *t*, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$



Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero, las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado serían las siguientes:

$$a = \text{cte}$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad v con el desplazamiento x-x_0

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Ejercitando mi habilidad.

Problema 1.

Un cuerpo cae con una velocidad de: $v(t) = 9.8t - 6t2\ t/(2 + 1)$ m/seg. Donde t es el número de segundos transcurridos desde que comienza a caer. ¿Desde qué altura cae si tarda 6 seg? en llegar al suelo?

Problema 2.

Si la velocidad de un móvil es de $v(t) = 3 - 3/(\ t\ 2\ + 1)$ metros por segundo (donde t es el número de segundos transcurridos desde que comienza a moverse), ¿qué longitud recorre en 3 segundos?.

Problema 3.

Si un cuerpo cae con una velocidad de $v(t) = (10t - t^2)/5$ metros por segundo (donde t es el número de segundos transcurridos desde que comienza a caer), calcular la altura desde la que cae, sabiendo que tarda 5 segundos en impactar contra el suelo.

Fuente:Imagen recuperada de www.pixabay.com junio 2020

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Textos Físicos:

- Flores Espinoza R.; Valencia Arvizu M.A.; García Alvarado M.G. 2014, Fundamentos del Cálculo, Pearson, Primera Edición.
- Cienfuegos D.; Galván D.; Romero J.; Favela M.; Rincón E.; Elizondo I.; Rodríguez A. 2014, Matemáticas con aplicaciones, Cengage Learning.
- Sánchez Sánchez M. 2011, Matemáticas Avanzadas para Administración y Dirección de Empresas, Sanz y torres.
- Espinoza Ramos E. 2012, Análisis Matemático II, edukperu.
- Morales Álvarez, Felicitas (2014), Calculo Integral, México, D.F: Pearson.

Textos Virtuales:

- Ortiz Campos F.; Ortiz Cerecedo F. 2014, Calculo Integral, Larousse-grupo editorial Patria.
- Anaya Francisco.; Arroyo García F.; Soto César. 2006, Cálculo Integral academia de matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
- Aguayo J. 2009, Calculo integral y series, ebooks Patagonia-J.C Sáez Editor.
- García Talavera. Guillermo, 2010, Problemas de cálculo diferencial e integral, Instituto Politécnico Nacional.
- Rivera Figueroa A., 2014, Calculo integral sucesiones y series de funciones, Larousse- Grupo editorial Patria.

Ligas electrónicas de apoyo:

- https://es.scribd.com/doc/101685490/Formulario-Derivadas-e-Integrales
- http://www.ofimega.es/Manuales/BAT/Integrales.pdf
- http://www.ofimega.es/Manuales/BAT/Integrales.pdf
- http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/cinematica/rectilineo/rectilineo_1.html

CÁLCULO INTEGRAL