Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos
del Estado de Guanajuato.

CECyTE Guanajuato

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CUADERNO DE TRABAJO
TERCER SEMESTRE

GEOMETRÍA ANALÍTICA
INGLÉS III
BIOLOGÍA
ÉTICA

Número de registro:
03-2021-121413194000-01

GTO Grandeza de México
Secretaría de Educación de Guanajuato

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Mensaje de la Directora General

Joven Estudiante:

En todo este proceso de incorporación al mundo profesional, las matemáticas tienen una importancia decisiva, por lo que su aprendizaje en la preparatoria es de la mayor importancia. Veamos por qué.

La competencia lógico matemática, la capacidad de escuchar; la expresión oral clara y la redacción lógica nos permiten incorporar información nueva y transmitirla en cualquier situación, sea escolar o laboral. Estas habilidades son, por lo tanto, la puerta de entrada para conocer todo lo que nos rodea (incluso las demás disciplinas) y para darnos a conocer a quienes nos rodean. Sin estas habilidades básicas no podemos tener éxito en la vida social adulta.

La reflexión sobre el uso cotidiano y su mejor conocimiento conducen aun pensamiento más ordenado, por lo que el aprendizaje de las materias básicas en la preparatoria permite a los alumnos tener un instrumento para clasificar mejor sus ideas.

En todo acto de comunicación, ya sea símbolos, números, de forma oral o escrita, intervienen una serie de elementos necesarios para que dicho acto sea eficaz. O lo que es lo mismo, sin estos componentes el proceso comunicativo no sería posible.

Directorio

Dra. Virginia Aguilera Santoyo
Directora General

Ing. Miguel Espartaco Hernández García
Encargado de la Dirección Académica

C.P Vicenta Martínez Torres
Directora Financiera y Administrativa

Lic. Sara Cecilia Casillas Martínez
Directora de Planeación y Desarrollo

Lic. Carlos Alberto Gorostieta Romero
Director de Vinculación

C.P. Alfredo García Flores
Director de Desarrollo Humano

Lic. Jaime Díaz Zavala
Director de Asuntos Jurídicos

LIA. Reynaldo Nava Garnica
Subdirector de Tecnologías de la Información

C.P. y M.A. Carlos Enrique Mendoza Santibáñez
Titular del Órgano Interno de Control

Comité Editorial

Comisión Revisora

Cecilia Lara Rodríguez - Directora del Plantad León San Juan Bosco.
Silvia Anahí Jiménez - Directora del Plantel Silao.
Diana Rubio Zarazúa - Directora del Plantel San José Iturbide**.**
Areli Mendiola Gómez - Subdirectora Académica del Plantel Purísima del Rincón.
Silvia Yadira Ramírez Mota - Subdirectora Académica del Plantel Celaya II.
Ma. Concepción Barrientos - Presidente de la Academia Estatal de Comunicación.
Zenzilt Anahí Herrerías Guerrero - Academia Estatal de Comunicación.
Ma Trinidad Rodríguez Muñoz - Academia Estatal de Comunicación.
Juan José Aviña Hernández - Academia Estatal de Comunicación.
Adriana Frías Ramírez Academia Estatal de Comunicación.
Pedro Arredondo González - Presidente de la Academia Estatal de Ciencias Experimentales.
Carla Renata Villagómez Balcázar - Secretaria de la Academia Estatal de Ciencias Experimentales.
Gerardo Medina Jiménez – Presidente de la Academia Estatal de Matemáticas.
José de Jesús Leos Mireles - Academia Estatal de Matemáticas.
Néstor José Guevara Ordoñez - Academia Estatal de Matemáticas.
Martha Margarita Martínez Rangel - Presidente de la Academia Estatal de nglés.
María del Carmen Martínez Ávila - Academia Estatal de inglés.
Ma. Elena Campos Campos - Academia Estatal de inglés.
María Leticia Núñez Pascual - Academia Estatal de inglés.
Lilia López Aguado - Academia Estatal de inglés.
Francisco Javier Alcacio González - Academia Estatal de inglés.
Celina Michelle Martínez Felipe - Academia Estatal de Humanidades.
Adela Tierrablanca Estrada - Academia Estatal de Humanidades.
Ma. Inés Rosas Bravo - Academia Estatal de Humanidades.

Colaboración Especial

Mtra. Celia Margarita García Esparza - Coordinadora de Cuerpos Colegiados.
Ing. Julio Cesar Vargas Manríquez — Analista especializado para el área de docencia.

Docentes Participantes

Cuaderno de Trabajo de Geometría Analítica

Gerardo Medina Jiménez - Plantel Comonfort.

Néstor José Guevara Ordoñez - Plantel León.

José de Jesús Godoy Alvarado - Plantel Irapuato III.

Sergio Arturo Vargas Aguilera - Plantel Irapuato III.

Arturo Capulín García Plantel - Santa Cruz de Juventino Rosas.

Martín García García - Plantel Doctor Mora.

Agustín Delgado Vega - Plantel Ocampo.

José Manuel Gómez Torres - Plantel San Francisco del Rincón.

Jacqueline Georgina Lugo Martínez - Plantel Apaseo el Alto.

Gloria Alcaraz Gutiérrez - Plantel León I.

Daniela Tenorio Guzmán - Plantel Irapuato III.

CONTENIDO

PRIMER PARCIAL. PLANO CARTESIANO 1

LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO… 1

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS 4

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA… 6

SEGUNDO PARCIAL. ECUACIONES DE LA RECTA Y LA CIRCUNFERENCIA 13

DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA 14

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA… 16

ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA 18

ECUACIÓN DE LA RECTA EN LA FORMA NORMAL… 20

LA CIRCUNFERENCIA Y LAS CÓNICAS 29

TERCER PARCIAL. PARÁBOLAS, ELIPSES E HIPÉRBOLAS 41

LA PARÁBOLA… 41

PARÁBOLA HORIZONTAL CON VÉRTICE EN EL ORIGEN… 43

PARÁBOLA VERTICAL CON EJE FUERA DEL ORIGEN… 44

ELEMENTOS DE LA ELIPSE… 47

LA HIPÉRBOLA 58

HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN… 58

ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA… 64

BIBLIOGRAFÍA… 67

PRIMER PARCIAL

<table>
<tr><th>Contenido central</th><th>Contenido específico</th><th>Aprendizaje esperado</th><th>Producto esperado</th></tr>
<tr><td rowspan="2">• La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas: El tratamiento en diversos sistemas de coordenadas.</td><td rowspan="3">• Sistema de coordenadas cartesiano. Me oriento en el plano:
¿puedo hacer un mapa del sitio en el que vivo? ¿Qué ruta es más corta?
• Los lugares geométricos básicos: la recta y la circunferencia. ¿Cómo se construye la ecuación de la recta?
¿Cuáles son sus invariantes? Camino en línea recta y el láser,
¿cómo lo hace? ¿Qué sabes del movimiento circular? Algunos ejemplos de la naturaleza,
¿conoces algunos?
• Otros lugares geométricos: la elipse, la parábola y la hipérbola.
¿Qué significan esas palabras?, ¿de dónde vienen?, ¿conoces su historia?
• La longitud de segmento, el punto medio, la perpendicular a un segmento, entre otras. Intersección de rectas y demás lugares geométricos.
¿Puedes doblar un papel que deje marcado en su doblez dos segmentos perpendiculares?, ¿dos segmentos paralelos?, ¿cómo lo hiciste?</td><td>Caracteriza de forma analítica los problemas geométricos de localización y trazado de lugares geométricos.</td><td>Colocar en un sistema cartesiano, tres lugares de la zona en la que vivo.</td></tr>
<tr><td>Ubica en el plano - en distintos cuadrantes – y localizan puntos en los ejes y los cuadrantes mediante sus coordenadas.</td><td>Calcular la distancia más corta entre la escuela y mi casa.</td></tr>
<tr><td>• Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano: El papel del origen de coordenadas en los sistemas de referencia.</td><td>Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. Ecuación general de los lugares geométricos básicos.</td><td>• Representar en un plano dos rectas paralelas, encontrar sus ecuaciones.
• Dibujar en el plano dos circunferencias concéntricas, encontrar sus ecuaciones.
• Localizar una recta en el plano y bosquejar su perpendicular por un punto dado.</td></tr>
</table>

UNIDAD I

PLANO CARTESIANO

Para aprender más

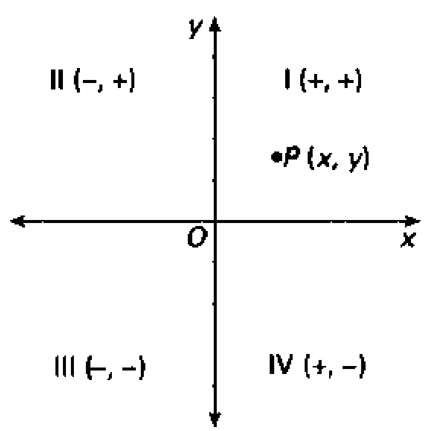
LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

Sistema coordenado rectangular.

Los puntos sobre un plano pueden identificarse mediante *pares ordenados de números reales.* A continuación, se muestran los elementos que componen este sistema:

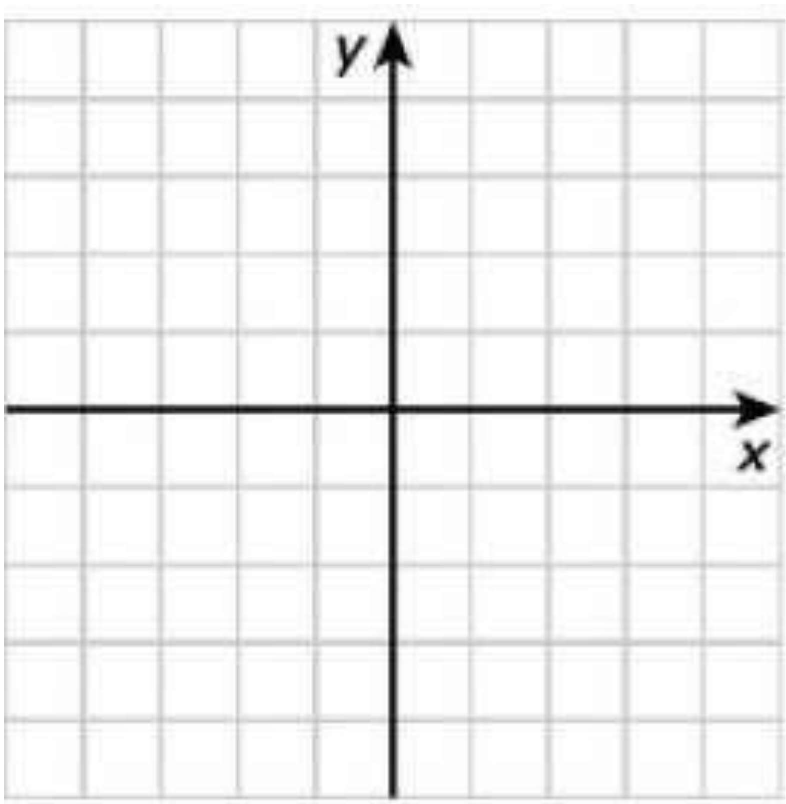
$P(x, y)$ es un punto geométrico, donde (x, y) representa un par de números reales.

x se llama abscisa, y y se llama ordenada; en conjunto, se llaman coordenadas. Al trazarlas en una gráfica, ésta queda dividida en cuatro partes, llamadas cuadrantes, los cuales se designan como I, II, III y IV y definen los signos de las coordenadas



Actividad. En los siguientes ejercicios realiza lo que se indica:

1. Identifica los siguientes puntos en el plano; A (3,-2), B (-7,1), C (5, -2), D (0, 4), E (-4,-3), F (1, -5), G (0, -6)



2. En qué cuadrante se localizan los siguientes puntos;

   A (-3, 2)

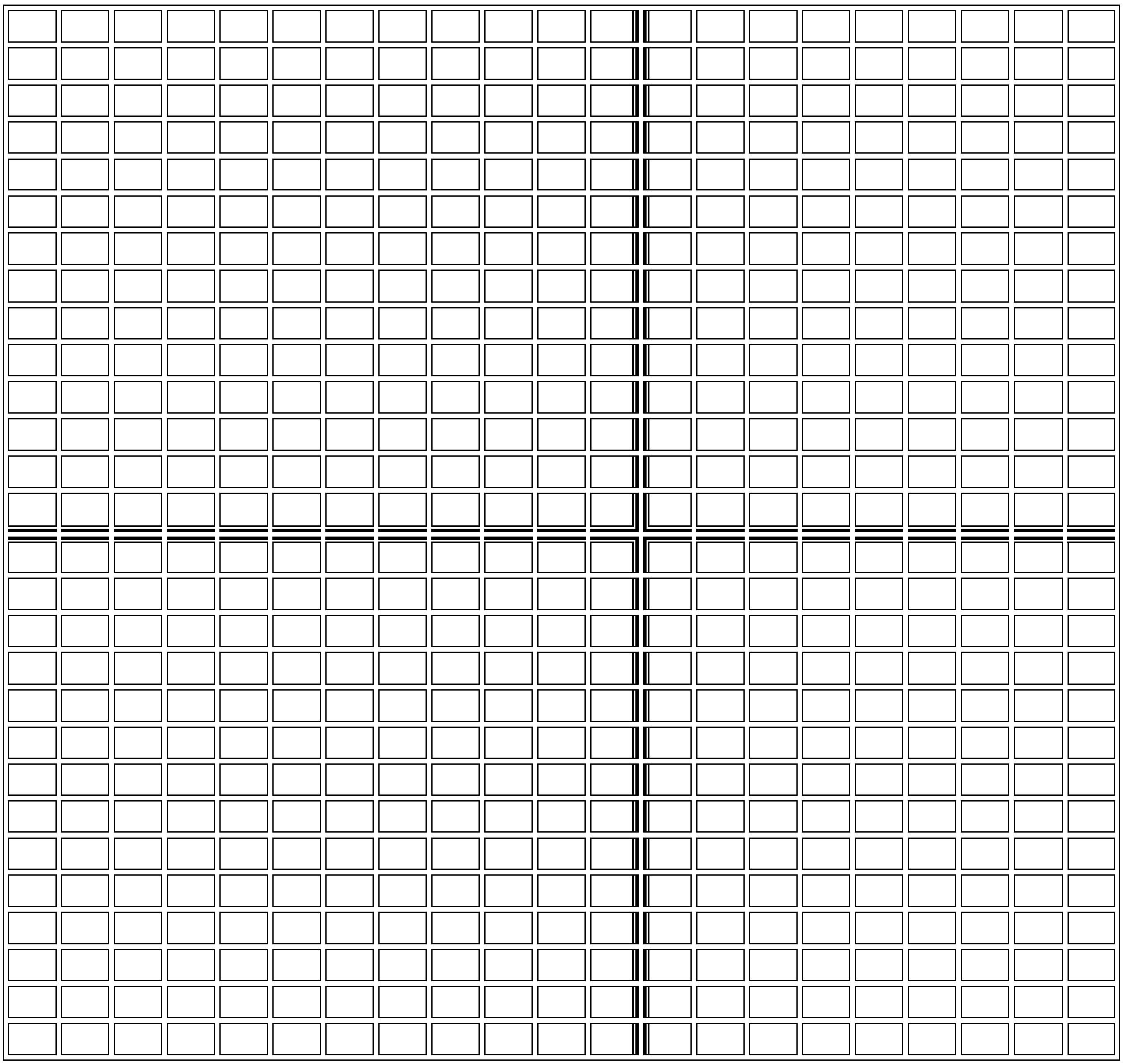
   B (-5,-3)

   C (4, 3)

   D (-6.4, -4.2)

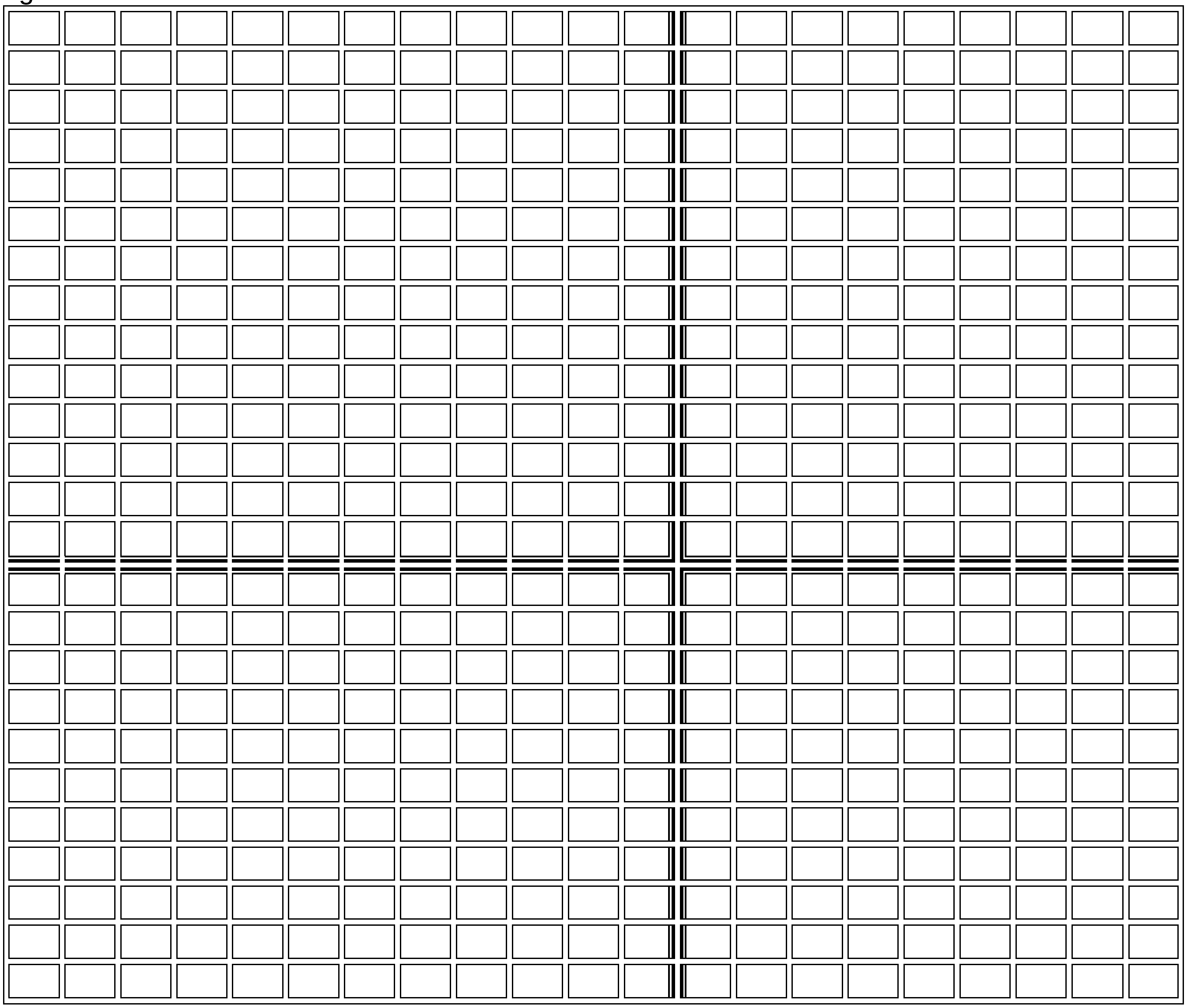
   E($\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{2}$)

3. Localiza los siguientes puntos y únelos en el orden que se te dieron, al final decora a tu gusto.
   (2, 8) (5, 8) (8, 6) (5, 5) (4, 4) (3, 4) (3,-2) (2, -3) (1, -3) (1, -6) (2, -6)
   (2, -7) (0, -7) (0, -3) (-1, -3) (-1, -6) (0, -6) (0, -7) (-2, -7) (-2, -3) (-6, 1)
   (-8, 2) (-8, 3) (-6, 3) (-8, 6) (-7, 7) (-6, 6) (-6, 8) (-5, 8) (-5, 5) (-2, 7)
   (-1, 6) (-5, 3) (-4, 1) (2, 2)



Ejercitando mi habilidad.

Instrucciones: Encuentra y une las siguientes coordenadas en el plano cartesiano y descubre la figura escondida.



(12,0) (15,2) (15,6) (-15,6) (-15,5) (-11,0) (12,0) ✂ (12,5) (10,5) (10,3) (12,3) (12,5) ✂ (8,3) (6,3) (6,5) (8,5) (8,3) ✂ (4,3) (2,3) (2,5) (4,5) (4,3) ✂ (1,7) (1,9) (3,9) (3,7) (1,7) ✂ (-10,3) (-8,3) (-8,5) (-10,5) (-10,3) ✂ (-4,9) (-4,8) (-2,8) (-2,9) (-4,9) ✂ (-6,5) (-6,3) (-4,3) (-4,5) (-6,5) ✂ (-8,6) (-8,8) (-6,8) (-6,10) (4,10) (8,6) ✂ (-7,6) (-7,7) (-6,7) (-6,6) ✂ (-4,10) (-4,16) (1,16) (1,10) ✂ (-6,10) (-11,15) ✂ (-10,14) (-14,10) (-12,9) (-8,12) ✂ (0,3) (-2,3) (-2,5) (0,5) (0,3).

Ahora resuelve los siguientes ejercicios:

Ejercitando mi habilidad.

Dibuja un plano cartesiano, representa gráficamente cada uno de los puntos y comenta en que cuadrante se encuentran.

a) N (-5,0) b) O(-2,-4) c) P(-7,5) d) S(-4.9, -2.7) e)U(9/4, -3/2) f) W(13/16, -7/3)

Dibuja el plano cartesiano y localiza los siguientes puntos. Una vez localizados, encuentra la distancia entre los segmentos: A (2, 3), B (-4, 6), C (-3, -1), D (5, -4), E (0, -5).

AB =______, BC =______, CD =______, EA =______, BD =______.

Rescatando mis Aprendizaje

Dibuja y ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos. Después encuentra el punto medio de los segmentos, tomando como referencia los puntos ubicados:

A (5, 2), B (3, 4), C (-1, -3) D (2, -3), E (0, 1).

AB =_______, BC =_______, CD =_______, DE =_______, EA =_______, AC =_,

BD =_______, DA =_______.

Ejercitando mi habilidad.

Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano. Traza y divide los segmentos a las razones indicadas y anota las coordenadas: A(-2,5), B(3,1), C(-4,-3), D(0,5).

AB a una razón de 1/2:__________________

BC a una razón de 2/3:__________________

CD a una razón de 1/4:__________________

DA a una razón de 3/4 : _________________

AC a una razón de 3:____________________

Fuente: Imagen recuperada de www.pixabay.com junio 2021

Para aprender más

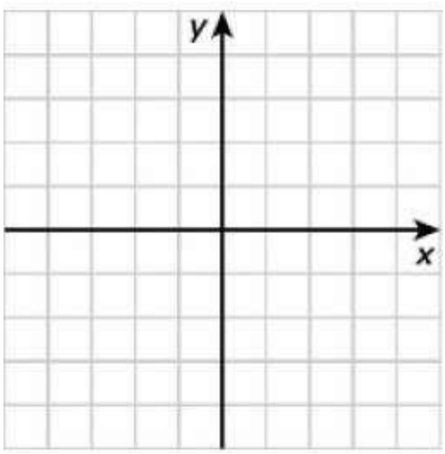
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

La distancia (d) entre dos puntos A (X_1, Y_1) B (X_2, Y_2) está dada por:

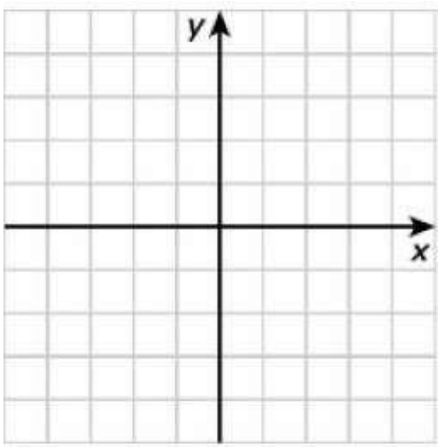
$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Actividad. Encuentra la distancia y grafica los puntos dados en los siguientes planos.

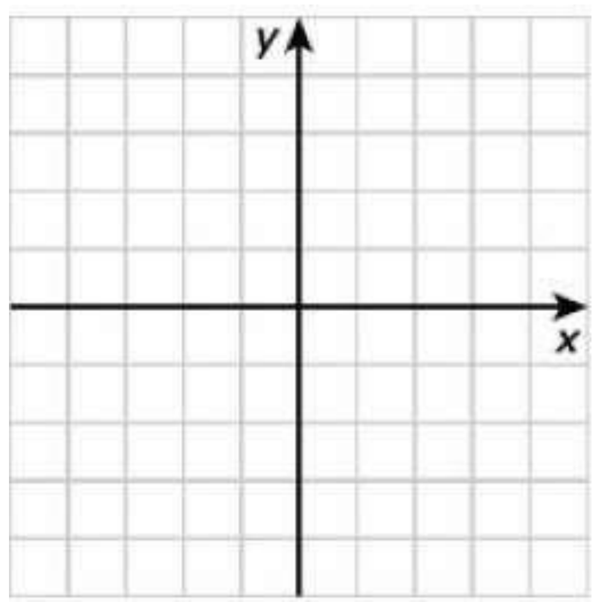
1. A (-6, 3) B (2, -4)



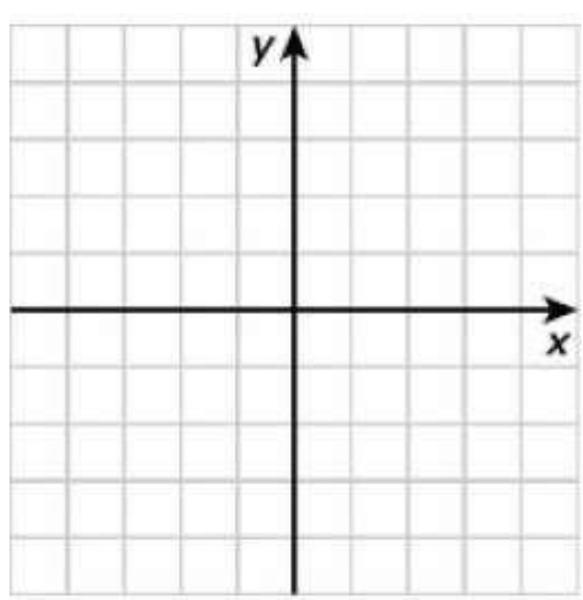
2. A (0, 3) B (-5, -2)



3. A $\left(\frac{11}{3}, \frac{7}{2}\right)$ B $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{5}\right)$

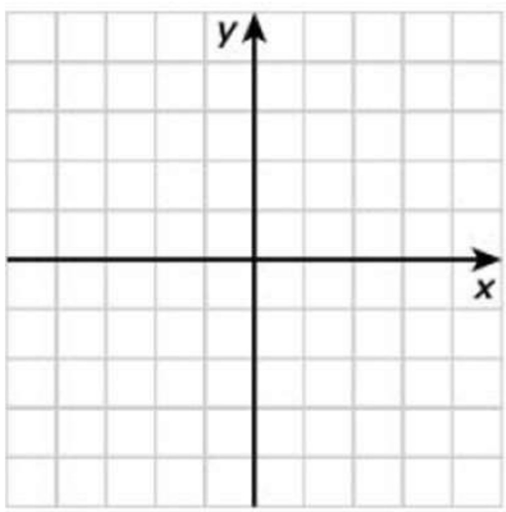


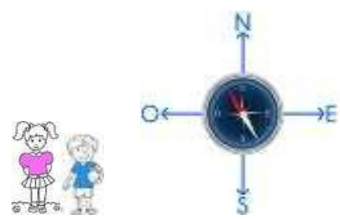
4. A $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ B $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$



Actividad. Ejercicio de aplicación de distancia entre dos puntos:

Carlos y María juegan a las escondidas en los alrededores de un árbol (observa la imagen) María se encuentra 1m al este y 5m al sur del árbol. La distancia entre Carlos y María es de 3.6m, ayuda a encontrar a Carlos si se sabe que está a 2m al este del árbol.





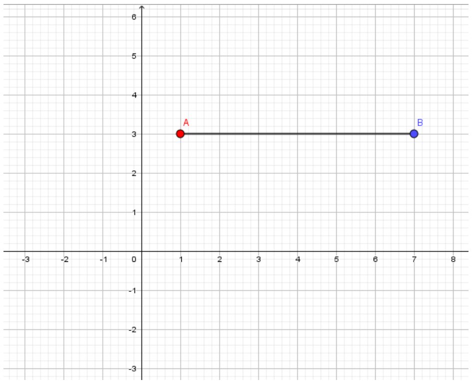
Actividad. Dibuja el plano cartesiano y localiza los siguientes puntos. Una vez localizados, encuentra la distancia entre los segmentos: A (2, 3), B (-4, 6), C (-3, -1), D (5, -4), E (0, -5).

AB =_____, BC =_____, CD =______, EA =______, BD =______.

Ejercitando mi habilidad.

Distancia entre dos puntos que se encuentran en una recta horizontal

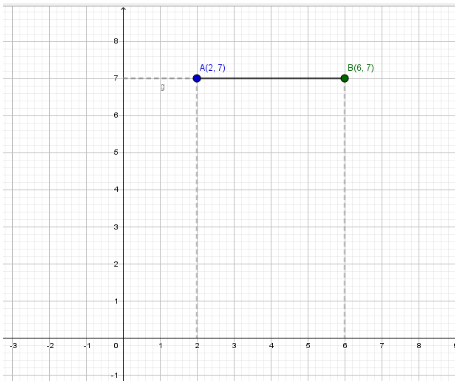
Para calcular la distancia entre dos puntos que se encuentran en un segmento horizontal en el plano cartesiano, como se muestra a continuación.



Se deben realizar los siguientes cálculos: hay que identificar las coordenadas de los puntos que se encuentran en los extremos del segmento. En este caso supongamos que estos tienen por coordenadas $A = (x_1, y)$ y $B = (x_2, y)$. Observe que ambos pares ordenados se encuentran en un segmento paralelo al eje x, por lo tanto, tienen el mismo valor en su segunda coordenada.

Esto implica que su distancia entonces puede ser definida por la diferencial de sus primeras coordenadas x_2 y x_1. Es decir; solo se realiza la diferencia entre las abscisas y se toma el valor absoluto de la diferencia.

A continuación, se muestra un ejemplo:



Se tienen los puntos $A = (2,7)$ y $B = (6,7)$ por encontrarse en una recta horizontal paralela al eje x, su distancia se calcula de la siguiente manera:

$$d_{AB} = \overline{AB}$$

Sustituyendo los valores tenemos que:

$$d_{AB} = |6 - 2| = 4$$

$$d_{AB} = |2 - 6| = 4$$

Recordemos que en la distancia no importa el orden que tomemos con las primeras coordenadas x_2 y x_1 ya que al final se calcula el valor absoluto (lo cual siempre nos arrojará un número positivo).

Actividad*.* Calcula la distancia de los siguientes pares ordenados.

1. $C = (4,5)$ y $D = (9,5)$
2. $D = (6,2)$ y $F = (6,5)$
3. $A = (-2,8)$ y $B = (7,8)$
4. $M = (-4,5.7)$ y $N = (-1,5.7)$
5. $F = (10, -3)$ y $G = (13, -3)$
6. $H = (14,0)$ y $I = (21,0)$

Rescatando mis Aprendizaje

Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano. Traza y divide los segmentos a las razones indicadas y anota las coordenadas: A (-2,5), B(3,1), C(-4,-3), D(0,5).

AB a una razón de 1/2:___________________

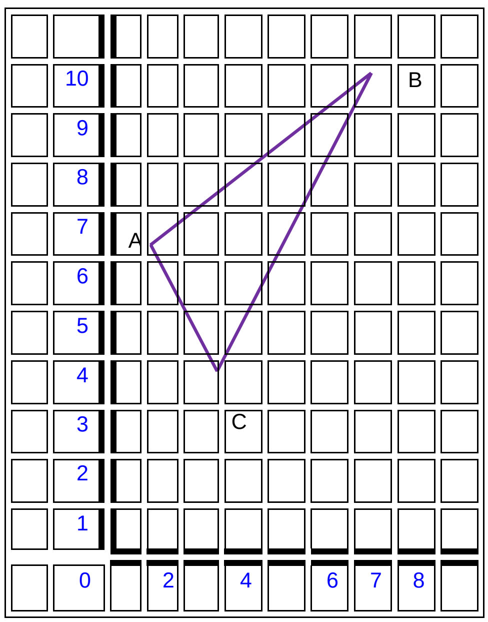
BC a una razón de 2/3:___________________

CD a una razón de 1/4:___________________

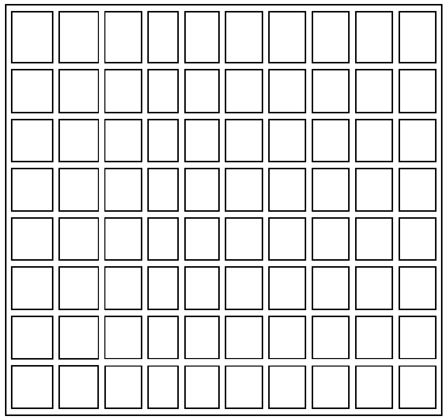
DA a una razón de 3/4: __________________

AC a una razón de 3:_____________________

2.- Calcula el perímetro del siguiente triangulo cuyas coordenadas están dadas en cm.



1.- Dibuja y calcula el área de las siguientes figuras: 3.5 Triángulo ABC con vértices en A (-,4), B (2,3), C (1,0)



Traza en tu cuaderno un plano polar y ubica los siguientes puntos:

1.- A (2,45°)	4.- D (1, 90°)	7.- G (5,300°)
2.- B (20,-30°)	5.- E (5,66.5°)	8.- H (2,270°)
3.- C (-20,30°)	6.- F (3,120°)	9.- I (1,122.5°)

¿Qué Aprendí?

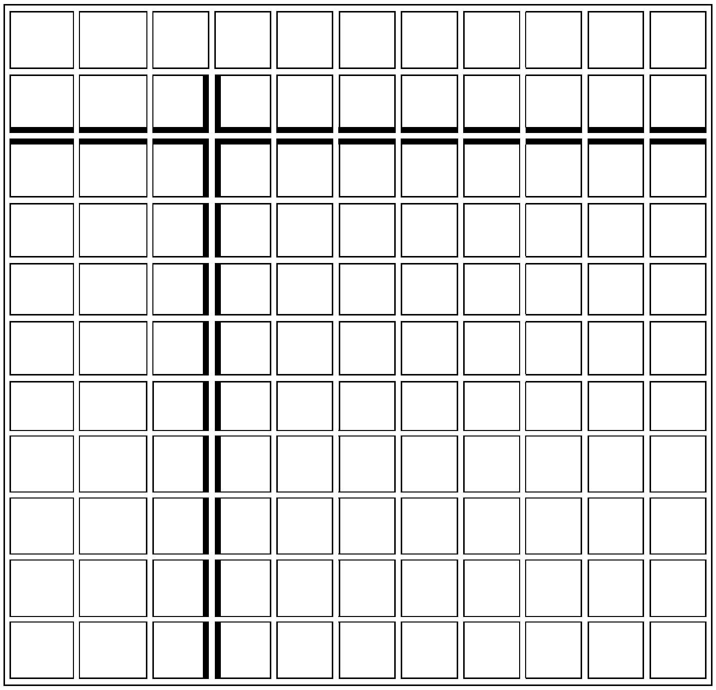
1.- Dibuja el plano cartesiano para cada uno de los siguientes ejercicios y convierte las coordenadas rectangulares a coordenadas polares:

A (1,1)	B (2,7)	C (-6,3)	D (-4,-4)	E (-3,8)	F (5,12)
G (-5,-7)	H (4, -3)	I (2,2)	J (3,6)	K (5,-3)	L (-9,-12)
M (-7,1)	N (4,-1)	Ñ (-5,-12).			

¿Qué Aprendí?

Convierte las siguientes coordenadas polares a coordenadas cartesianas rectangulares y ubícalas en el plano cartesiano:

Punto	Coordenadas	
	Polares	Cartesianas
A	$(1,30^{o})$	
B	$(10.143,13^{o})$	
C	$(3,50^{o})$	
D	$(5.66,225^{o})$	
E	$(11.31,45^{o})$	
F	$(4,100^{o})$	
G	$(7,180^{o})$	
H	$(5.66,135^{o})$	
I	$(6.32,18^{o})$	
J	$(6.32,198^{o})$	
K	$(4.47,63.43^{o})$	
L	$(5,90^{o})$	



¿Qué Aprendí?

Ejercicios para resolver:

1.- Dibuja en forma gráfica la figura para hallar la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es 0 = 120º.

Determinar la ecuación de la recta formada por los puntos:

1.- M (-7,5) y N (-2, -5), 2.- A(3, 7) y B(-1, 3). 3.- C (-3, 7) y D (-1, 1), 4.- E (6, 8) y F (2, 0)

Ejercitando mi habilidad.

Obtén la ecuación de la recta con los siguientes datos y representa su gráfica de cada una:

Pendiente m= -2 y pasa por el punto A (-2, 5). Pendiente m = 6 y pasa por el punto B (-2, 4).

Pendiente m = 2 y pasa por el punto C (1, -2). Pendiente m = -3 y pasa por el punto D (-4, -3).

Determina la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen con los siguientes datos:

1.- Pendiente de 4 y ordenada al origen de 8: 2.-

Pendiente de -1 y ordenada al origen de -8: 3.-

Pendiente de 7 y ordenada al origen de -2:

4.- Pendiente de 2.5 y ordenada al origen de -2.5:

Determina las ecuaciones de las rectas en su forma simétrica de acuerdo con los siguientes datos:

1.- a = 6, b = 4:

2.- a = -6, b = -4:

¿Qué Aprendí?

Expresa las siguientes ecuaciones de la recta en su forma general.

1.- y = 4x + 3

2.- y = -3x – 6

3.- y = -x + 5

1.- Determinar la distancia del punto B (2, 7) a la recta cuya ecuación en su forma simétrica es:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$$

2.- Determinar la distancia del punto B (3, 5) a la recta cuya ecuación en su forma simétrica es:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$$

Ejercitando mi habilidad.

Determina si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares y traza su representación gráfica:

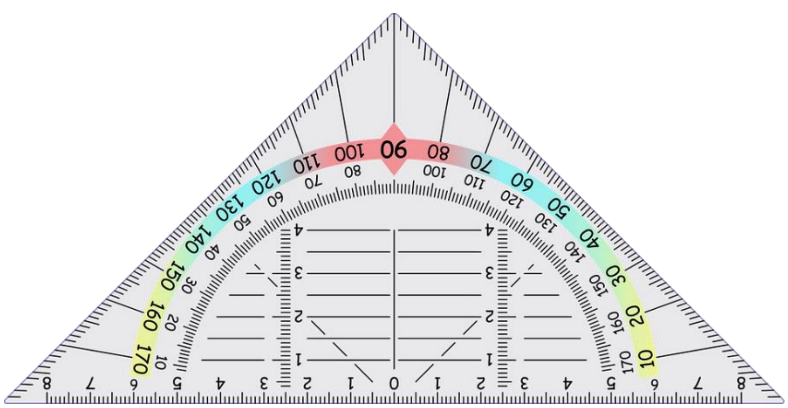
1.- Si L_1 está formada por los puntos A (5, 3) y B(5, 4) y L_2 formada por los puntos C(2, 3) y D(5, -3).1.- Determina las coordenadas del punto de intersección entre las rectas

y_1 = 6x – 4

y_2 = 2x + 3

Completa los datos de la tabla con base en el triángulo de la derecha.

Lado	Ecuación mediatriz
FG	
GE	
EF	
Ángulo	**Ecuación bisectriz**
E	
F	
G	



Fuente: Imagen recuperada de www.pixabay.com junio 2021

Para aprender más

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divide al segmento $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{AP}{PB}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad \text{donde} \qquad r \neq -1$$

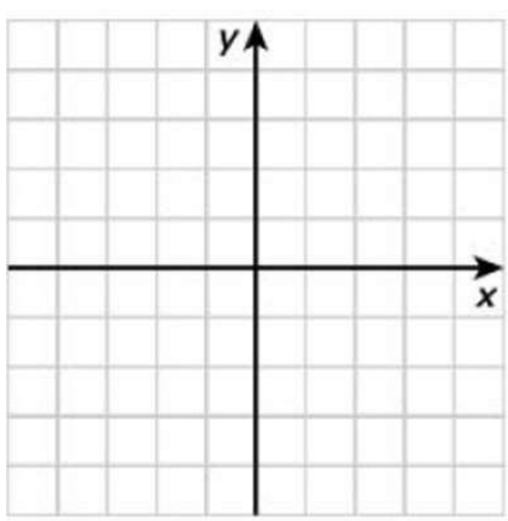
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

El punto medio PM de un segmento AB es el resultado de una razón $r = 1$; por lo tanto, las coordenadas anteriores se convierten en:

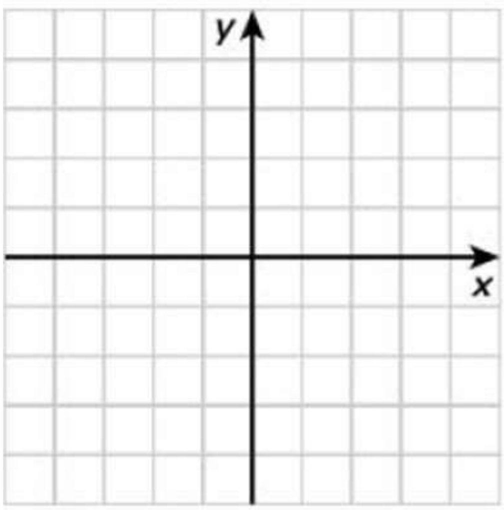
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Actividad. Realiza lo que se te indica:

1. Divide en cuatro partes iguales el siguiente segmento formado por A (9, -3) B (-2, 7). Grafica tus resultados obtenidos.



2. Encuentra las coordenadas que dividen en tres partes iguales al segmento formado por A (2, -4) B (8, 12) y determina su punto medio. Grafica tus resultados obtenidos.



3. **Dibuja y ubica** en el plano cartesiano los siguientes puntos. Después encuentra el punto medio de los segmentos, tomando como referencia los puntos ubicados:

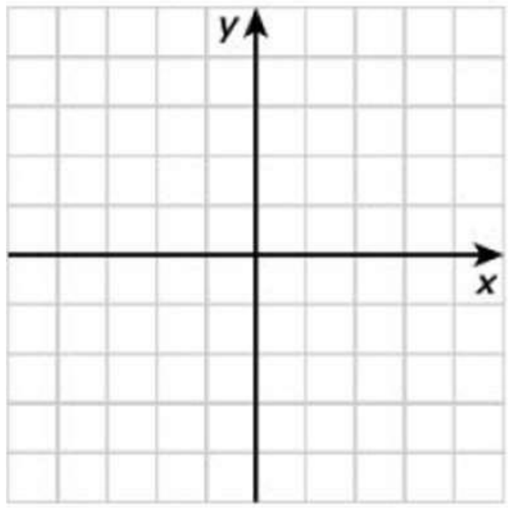
A (5, 2), B (3, 4), C (-1, -3) D (2, -3), E (0, 1).

AB =_______, BC =_______, CD =_______, DE =_______, EA =_______,

AC =_______, BD =_______, DA =_______

Rescatando mis Aprendizajes

1. Don Pedro tiene un terreno cuyas coordenadas son A (6, 1) B(-3, 5) C(-5, -1) D(4, -5). Sus hijos le piden que les herede en partes iguales, si Don Pedro tiene tres hijos ayúdale a dividir a un terreno de forma vertical de manera que sus hijos queden satisfechos.



Para aprender más

El área de un polígono, conocidos sus vértices, se calcula con la siguiente fórmula:

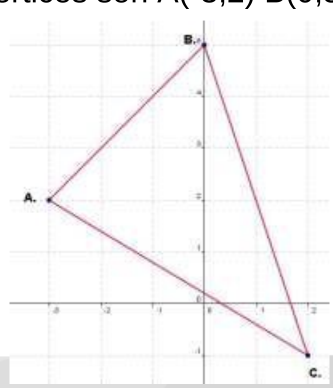
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\left|[(x_1 * y_2) + (x_2 * y_3) + (x_3 * y_n) + (x_n * y_1)] - [(x_2 * y_1) + (x_3 * y_2) + (x_n * y_3) + (x_1 * y_n)]\right|$$

Ejercitando mi habilidad.

Actividad.

1.-Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A(-3,2) B(0,5) C(2,-1)



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}|[(-3*5)+(0*-1)+(2*2)]-[(0*2)+(2*5)+(-3*-1)]|$$

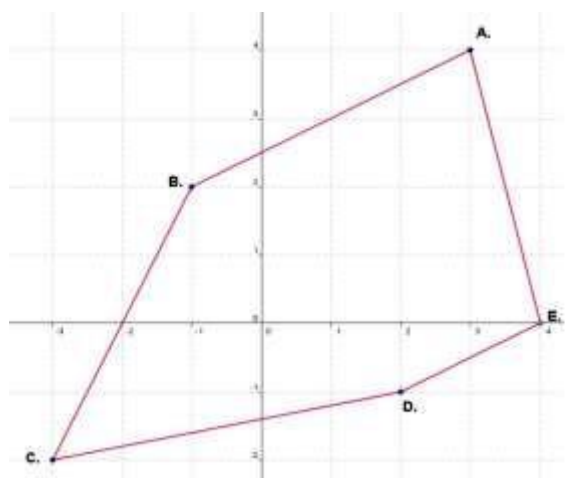
$$A = \frac{1}{2}|[(-15)+(0)+(4)]-[(0)+(10)+(3)]|$$

$$A = \frac{1}{2}|[-11]-[13]| \;;\; A = \frac{1}{2}|-11-13| \;;\; A = \frac{1}{2}|-24| \qquad A = 12u^2$$

El símbolo ǁ indica valor absoluto, lo cual significa que, aunque el resultado dentro de él sea negativo, se considera positivo.

2.- Calcula el área del polígono cuyos vértices son A (3,4) B (-1,2) C (-3,-2) D (2,-1) E (4,0)

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$



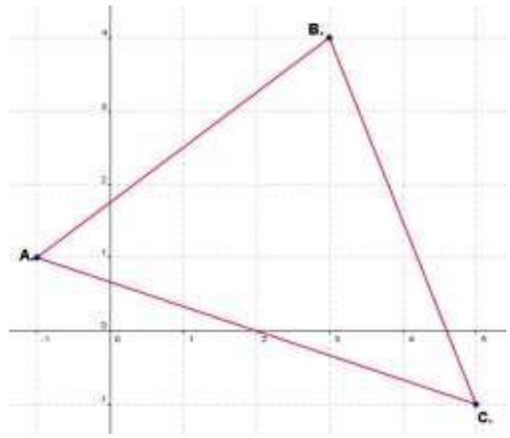
$$A = \frac{1}{2}|[(3*2)+(-1*-2)+(-3*-1)+(2*0)+(4*4)]-[(-1*4)+(-3*2)+(2*-2)+(4*-1)+(3*0)]|$$

$$A = \frac{1}{2}|[(6)+(2)+(3)+(0)+(16)]-[(-4)+(-6)+(-4)+(-4)+(0)]|$$

$$A = \frac{1}{2}|[27]-[-18]| \;;\; A = \frac{1}{2}|27+18| \;;\; A = \frac{1}{2}|45| \qquad A = 22.5u^2$$

3.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A(-1,1) B(3,4) C(5,-1)

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2}\left|[(-1*4)+(3*-1)+(5*1)]-[(3*1)+(5*4)+(-1*-1)]\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|[(-4)+(-3)+(5)]-[(3)+(20)+(1)]\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|[-2]-[24]\right| \; ; \;\; A = \frac{1}{2}\left|-2-24\right| \; ; \;\; A = \frac{1}{2}\left|-26\right| \qquad A = 13u^2$$

¿Que aprendí?

Calcula las siguientes áreas

1. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A (0,4) B (8,0) C (-1,-4)

2. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A (1,-6) B (6,1) C (-2,5)

3. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A (0,3) B (8,-1) C (0,-7)

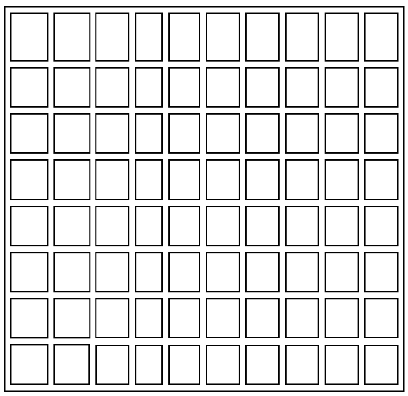
4. Calcula el área del polígono cuyos vértices son A (1,5) B (-2,4) C (-3,-1) D (2,-3) E (5,1)

5. Calcula el área del polígono cuyos vértices son A (8,0) B (2,3) C (5,4) D (-1,8)

6. Dibuja y calcula el área de las siguientes figuras: 3.5

Triángulo ABC con vértices en A (-2,4), B (2,3), C

(1,0)



Fuente: Imagen recuperada de p: www.pixabay.com junio 2021

PRIMER PARCIAL

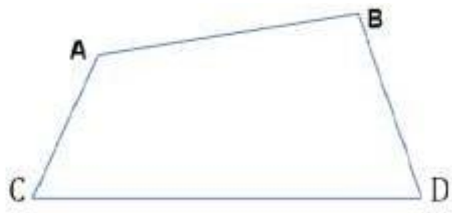
Contenido central	Contenido específico	Aprendizaje esperado	Producto esperado
Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: Recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.	• ¿Qué tipo de lugares geométricos se precisan para tratar con rectas y cónicas, sus propiedades, puntos singulares, sus relaciones y sus transformaciones? • ¿Cómo construir la ecuación de la circunferencia? ¿Qué propiedades tienen los puntos sobre una circunferencia? • Elementos históricos sobre la elipse, la parábola y la hipérbola. Trazado y propiedades. ¿Qué son las cónicas?	Caracteriza y distingue a los lugares geométricos según sus disposiciones y sus relaciones.	Argumentar las diferencias visibles entre una recta y una parábola. Construir una elipse que describa el movimiento de la Tierra en torno del Sol.

UNIDAD II

SEGUNDO PARCIAL: ECUACIONES DE LA RECTA Y LA CIRCUNFERENCIA

Rescatando mis Aprendizaje.

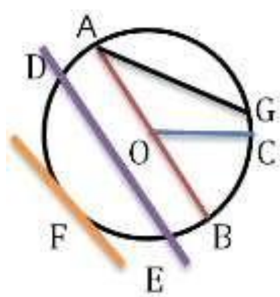
De la siguiente figura identifica lo que se indica:



1. Las rectas paralelas: ____
2. El valor de la pendiente de la recta CD:________________________________
3. identifica los lados del trapezoide que tienen una pendiente positiva:
   ____
4. Anota los lados de pendiente negativa: ________________________________
5. ¿Cuál de los lados tiene pendiente infinita?______________

Identifica los elementos en la circunferencia

ELEMENTO	RECTA
Radio	
Diámetro	
Cuerda	
Arco	
Tangente	



Para aprender más

DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA.

Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto de ella.
Como ya hemos visto antes las ecuaciones en dos variables representan lugares geométricos en el plano.

Empezaremos nuestro estudio de lugares geométricos con las rectas, que son los más sencillos.

Consideremos el problema de encontrar la ecuación de la recta no vertical que pasa por un punto

P (x1, y1) y tiene pendiente m.

Si Q (x, y) es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

puesto que Q ≠ P y la recta no es vertical, 1 x ≠ x, multiplicando por 1 x − x , obtenemos:

Ecuación 1: $(y - y_1) = m(x - x_1)$

Esta forma de la ecuación de la recta se llama ecuación punto-pendiente de la recta, ya que la obtuvimos conociendo la pendiente y un punto de ella, y recíprocamente si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber por qué punto pasa la recta y que pendiente tiene.

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (5, -1) y tiene pendiente -3.

Solución:

m= -3

Punto (5,-1) *ecuación a utilizar:* $(y - y_1) = m(x - x_1)$

Paso 1.- Se sustituyen los valores en la ecuación:

$$(y - (-1)) = -3(x - 5)$$

Paso 2.- Se realizan operaciones:

$$y + 1 = -3x + 5$$

Paso 3.- Se despeja y:

$$y = -3x + 5 - 1$$

Paso 4.- Se reducen términos:

R: $y = -3x + 4$

Ejercitando mi habilidad

Resuelve los siguientes ejercicios:

a. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (5, -3) y tiene pendiente -2.

Solución:

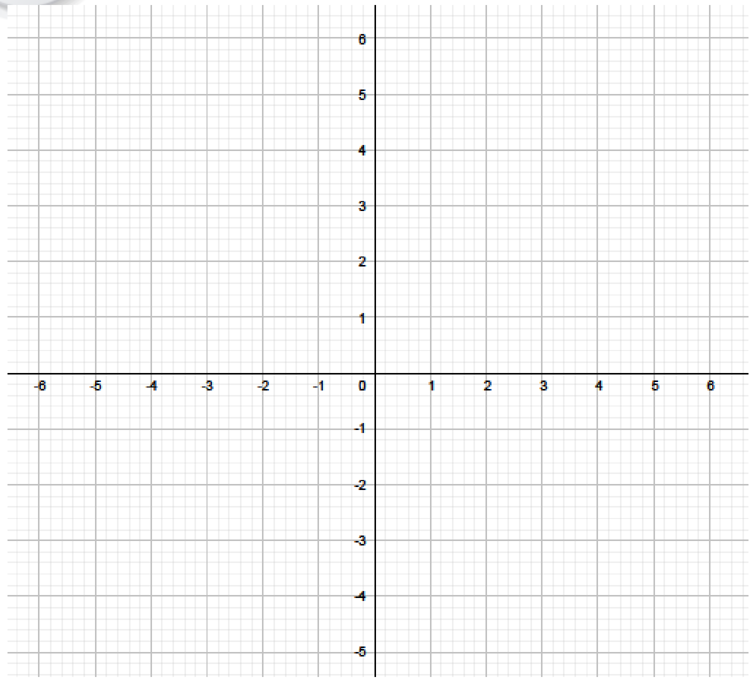
b. *Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (4, -1) y tiene pendiente -2.*

Solución:

c. *Dar un punto y la pendiente de la recta y -6 = -6(x -4).*

Solución:

d. Dibujar la recta cuya ecuación es 3x + y = 2.



Para aprender más

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA.

Nos gustaría tener una forma de la ecuación de la recta que cubriera tanto a las rectas verticales como a las que no lo son. Esta forma es la *ecuación general* de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro de manera que este quede igualado a cero.

Ecuación general de la recta

$$Ax + By + C = 0$$

Recordemos que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando obtenemos una a partir de la otra efectuando las operaciones siguientes:

1. Sumar la misma cantidad de ambos lados de una ecuación.
2. Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero.

Dos ecuaciones que son equivalentes representan el mismo lugar geométrico, en el caso de ecuaciones
lineales en dos variables, representan la misma recta.
Observa que la ecuación general de la recta no es única, ya que si multiplicamos la ecuación anterior por
una constante λ distinta de cero, obtenemos la ecuación;

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$$

que es de la misma forma que la anterior. Así, las tres ecuaciones siguientes son equivalentes y todas están en la forma general;

$$3x - 6y + 12 = 0$$

$$-2y + 4 = 0,$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

y representan a la recta cuya ecuación pendiente-ordenada al origen es:

$$y = 2x + 2$$

Ejemplos:

1. Escribir la ecuación $y = 4x + 5$ en la forma general.

Solución:

Paso 1. Pasando todos los términos de un lado de la ecuación obtenemos la ecuación en forma general:

$$4x - y + 5 = 0.$$

2. Escribir la ecuación general de la recta que pasa por P (-3,2) y tiene pendiente 8.

Solución:

La ecuación punto-pendiente de la recta es, $y - 2 = 8(x + 3)$ efectuando las operaciones y pasando todos los términos de un lado de la ecuación obtenemos la ecuación en la forma general:

Paso 1. Desarrollar los productos.

$$y - 2 = 8x + 24$$

Paso 2. Se trasladan todos los términos al miembro izquierdo e igualamos a 0:

$$y - 2 - 8x - 24 = 0$$

Paso 3. Se reducen términos semejantes y se acomodan las variables en orden alfabético:

$$8x - y + 26 = 0$$

Para aprender más

ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA.

A partir de la ecuación general de la recta,

$$Ax + By + C = 0,$$

si C ≠ 0, podemos pasarlo al otro lado de la igualdad y dividir entre -C para obtener

$$\frac{Ax}{c} + \frac{By}{c} + \frac{C}{c} = \cap$$

Por consiguiente:

$$\frac{Ax}{-c} + \frac{By}{-c} + 1 = 0$$

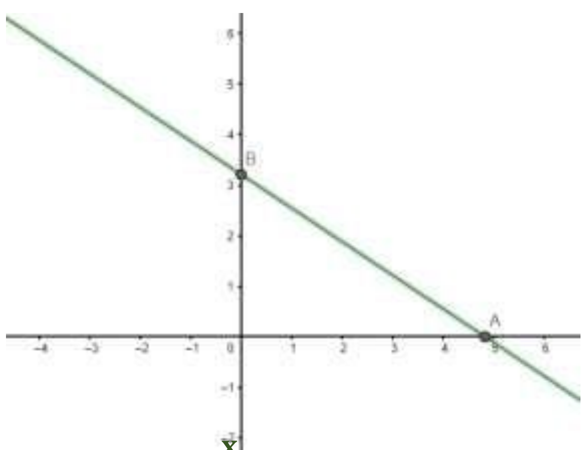
$$\frac{x}{\frac{-c}{A}} + \frac{y}{\frac{-c}{B}} = 1$$

Si pasamos los coeficientes a dividir denominador queda:

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Si $a = \frac{-C}{A}$ y $b = \frac{-C}{B}$ la ecuación simétrica queda de la siguiente forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la recta que corta a los ejes en (5,0) y (0, -3).

Solución:

Hacemos a = 5 Y b = -3 y sustituimos en la ecuación simétrica:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

efectuando las operaciones podemos transformarla a la forma general

$$-3x + 5y + 15 = 0$$

2. Encontrar los puntos de intersección de la recta $5x + 8y - 6 = 0$ con los ejes.

Solución:

Paso1. Pasamos el término independiente del otro lado de la ecuación y dividimos entre todos los términos:

$$5x + 8y - 6 = 0$$

Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com junio 2021

$$5x + 8y = 6$$

$$\frac{5x}{6} + \frac{8y}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{6}{8}} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

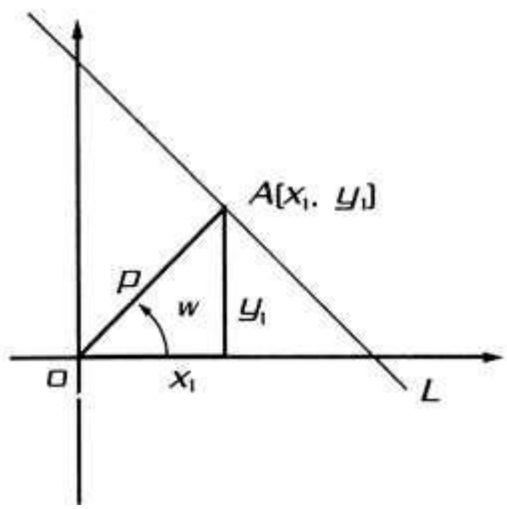
Entonces la recta corta los ejes en los puntos $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

Para aprender más

ECUACIÓN DE LA RECTA EN LA FORMA NORMAL.

La recta *L* queda determinada por la longitud de su perpendicular trazada desde el origen y el ángulo positivo W que la perpendicular forma con el eje de las *x.* La perpendicular OA a la recta *L,* representada por *P,* se *considera siempre positiva* por ser una distancia. El ángulo W engendrado por *OA* varia de 0°≤ W < 360°.

Si damos valores a *p* y W, la recta *L* trazada por *A(x1 , y,)* queda determinada por la ecuación de la recta en su *forma normal* que se obtiene en la forma siguiente:



Observando la figura anterior, tenemos:

$$cosw = \frac{x_1}{p} \quad y \qquad senw = \frac{y_1}{p} sen$$

Despejamos: $x_1 = \cos w \,.\, p$ *Despejamos* $y_1 = \operatorname{sen} w \,.\, p$

Sustituimos los dos valores anteriores en A = (x1 , y1), con lo cual obtenemos las coordenadas del punto A, que son:

$$A = (p \cos W, p \operatorname{sen} w)$$

Por su parte, la pendiente m de OA es:

$$m = \tan w$$

Como la recta L es perpendicular a la recta GA, sus pendientes están relacionadas con;

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Es decir, la recíproca con signo cambiado. Como ya sabemos que la pendiente de OA es $\tan w$, la inversa de esta función con signo cambiado de la recta L perpendicular a GA es:

$$-\cot w$$

de donde,

$$m = -\cot w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente los valores de x_1 , y1, y de m, queda:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(x - p\cos w)$$

Quitamos el denominador $\operatorname{sen} w$ y desarrollamos:

$$y \operatorname{sen} w - p \operatorname{sen}^2 w = -\cos w(x - p \cos w\}$$

$$y \operatorname{sen} w - p \operatorname{sen}^2 w = -x \cos w + p \cos^2 w$$

Factorizamos el segundo miembro:

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w = p (\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w)$$

Aplicamos la identidad pitagórica:

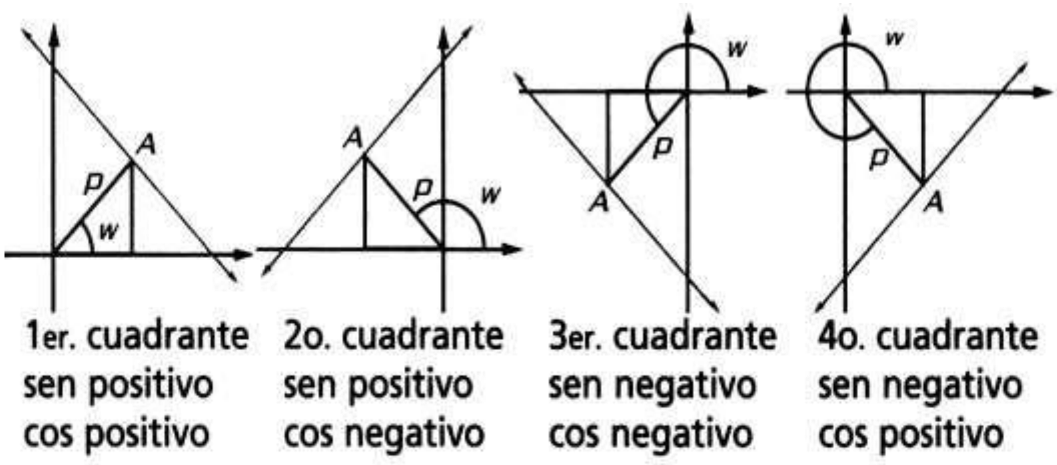
$$\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w = 1$$

sustituimos:

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w = p$$

De donde:

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0$$



Ejemplo:

1. Determina la ecuación de la recta en su forma normal, con w = 60° y p = 3 y gráfica.

Solución:

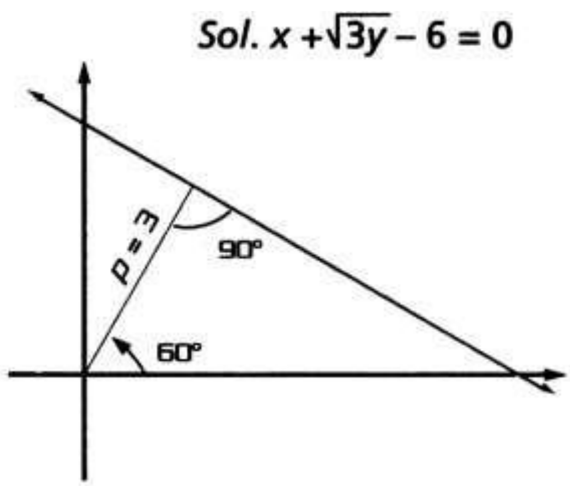
Sustituimos en:

$$X \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0$$

$$X \cos 60° + y \operatorname{sen} 60° - 3 = 0$$

Como $\cos 60 = \frac{1}{2}$ y

$$\operatorname{sen} 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Sustituimos:

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,y}{2} - 3 = 0$$

Respuesta $\qquad x + \sqrt{3} - 6 = 0$

6.- Procedimiento para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general.

La ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, queremos representarla en su forma normal

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0.$$

Con $Ax + By + C = 0$, siendo K una constante distinta de cero, procedemos como sigue:

Dividimos cada termino de $Ax + By + C = 0$ entre K; así tenemos,

$$\frac{Ax}{K} + \frac{By}{K} + \frac{C}{K} = 0$$

Dónde: $\cos w = \frac{A}{K}$ $\quad \frac{B}{\;} \quad \frac{C}{\;} \quad \frac{C}{\;}$

Elevamos al cuadrado:

$\cos w = \frac{A}{K}$ $\qquad$ Obtenemos $\cos^2 w = \frac{A^2}{K^2}$

K

y

$\operatorname{sen} w = \frac{B}{K}$

Obtenemos

$\operatorname{sen}^2 w = B^2$

K $\qquad \frac{\;}{2}$

Sumando miembro a miembro de la igualdad:

$$\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 = \frac{B^2}{K^2} + \frac{A^2}{K^2} \qquad \text{como: } \operatorname{sen}^2 w + \cos^2 = 1$$

Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com

Sustituyendo nos queda:

$$1 = \frac{B^2}{K^2} + \frac{A^2}{K^2}$$

Quitamos el denominador y nos queda:

$$1 = \frac{A^2 + B^2}{K^2}$$

$$K^2 = A^2 + B^2 \quad \text{Donde: } K = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

Y obtenemos

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{Bx}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Para escoger el signo que precederá al radical $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ se tomaran en consideración los conceptos

siguientes:

a. *El signo que se anteponga al radical debe ser el signo contrario al que tiene el coeficiente de* C.

Ejemplo:

En $x + y - 4 = 0$, como C = -4, el signo que precederá al radical será el (+).

b. Si sucede que:

$C = 0, A \neq 0, B \neq 0$; en este caso el signo del radical será el que tiene B.

Ejemplo:

En $x - 2y = 0$, como $B = -2$, el signo que precederá al radical será (-).c. Si sucede que:

$C = B = 0$; En este caso el signo del radical será el de A.

En $-7x = 0$, como $A = -7$, el signo que precederá al radical será (-).

Ejemplo.

Determina la forma normal de la recta $12x - 5y - 52 = 0$ así como los valores de p, W, y traza la gráfica.

Sustituimos en : $\boxed{\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{Bx}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0}$

$A = 12;\ B = -5;\ C = -52;\ \pm\sqrt{A^2+B^2} = 169 = 13$

$$\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - \frac{52}{13} = 0$$

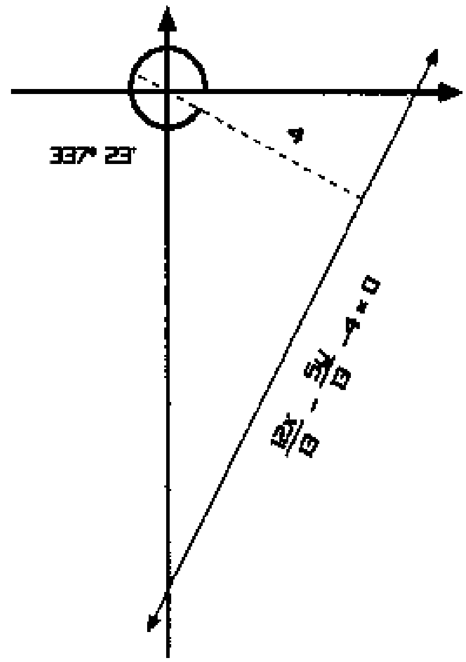
$$\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - 4 = 0$$

De donde,

$$\cos w = \frac{12}{13}\ , \operatorname{sen} w = -\frac{5}{13} \quad \text{y } p = |-4| \therefore p = 4$$

Como el seno w es negativo y coseno de w es positivo, el ángulo w debe medirse en el cuarto cuadrante; su valor es 337° 23'.

$$Cos\ w = \frac{12}{13}\ 0.9230 \therefore W = COS^{-1}0.9230 = 22^o\ 37'\ w = -22^o\ 37'$$



$$sen\ w = -\frac{5}{13} = -0.3846 \therefore w = sen^{-1} - 0.3846 = w = 337°\ 23'$$

$$w = 22^{o}\ 37'\ w = -22^{o}\ 37'$$

$$w = 359^{o}\ 60' - 22^{o}\ 37'$$

$$w = 337°\ 23'$$

Ejercitando mi habilidad.

I. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente que se indica.

a) A (5, 9) y $m = 3$.

b) B (-6, 5) y $m = 2$

II. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene el ángulo de inclinación que se indica.

a) A (7, 4) y $\theta = 60°$

b) P (2, -7) y $\theta = 135°$

III. Halla la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y su intersección con el eje *y* se indica.

a) $m = \frac{3}{5}$, intersección (-3)

b) $m = -5$, intersección (2)

IV. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

a) A (2, 4) y B (-7, 5)

b) P (-3, -2) y Q (5, 3)

V. Halla la ecuación de la recta en la forma normal, para los siguientes valores de *p* y *w*; trazar la gráfica correspondiente.

a) $p = 6$ y $w = \frac{4\pi}{3}$

b) $p = 7$ y $w = 45°$

VI. Determina la distancia de las siguientes rectas dadas al punto indicado.

1. $4x - 5y - 13 = 0$ al punto A (7, -1).
2. $2x + 5y + 10 = 0$ al punto C (1, 3).
3. $3x - 4y + 2 = 0$ al punto P (5, -2).

Para aprender más

LA CIRCUNFERENCIA Y LAS CÓNICAS.

La circunferencia como lugar geométrico.

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro. La distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia es el radio.

Ecuación cartesiana de la circunferencia de centro en el origen y radio *r*.

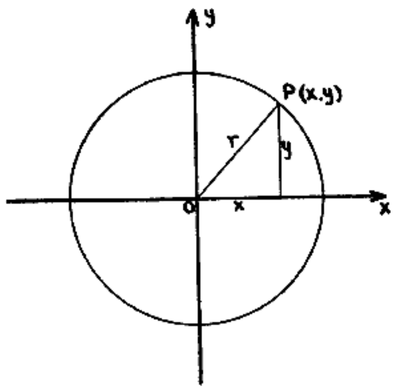
Aplicando el método de los lugares geométricos, tendremos:

1. Sea *P (x, y)* un punto cualquiera de la circunferencia.
2. La condición que establece que *P* es de la circunferencia es: *OP=r*
3. Traduciendo analíticamente (formula de 1a distancia entre dos puntos):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

4. Transformando:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



(CECyTE Baja California,2019)

Que es la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro el origen y radio *r.*

Ejemplos.

1. La ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio 6 es:

$$x^2 + y^2 = 36$$

2. La ecuación $x^2 + y^2 = 49$, representa una circunferencia de centro el origen y radio r = $\sqrt{25}$

La ecuación

Ecuación cartesiana de una circunferencia de centro en uno de los ejes de coordenadas y radio r.

Primer caso. El centro está en el eje de las *x*. Si llamamos *h* a la abscisa del centro, sus coordenadas serán (*h*, 0).

Si *P* (*x, y*) es un punto cualquiera de la circunferencia (fig.2), tendremos:

CP = *r.*

Traduciendo analíticamente:

$$\sqrt{(x-h)^2 + y^2 =} r^2$$

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$

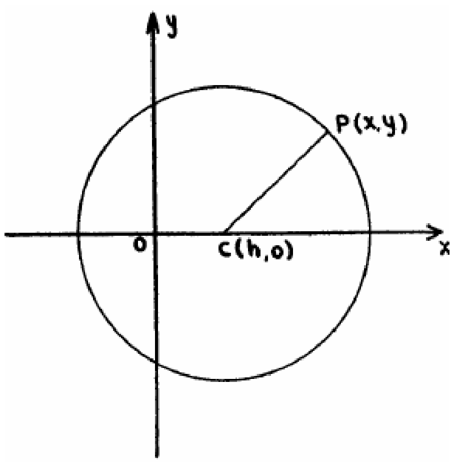


Fig. 2

(CECyTE Baja California, 2019)

Que es la ecuación de la circunferencia de centro en un punto del eje *x* y radio *r.*

Ejemplos. 1. La ecuación de la circunferencia de centro C(5,0) y radio 4 es:

$$(x-5)^2 + y^2 = 16$$

Desarrollando productos obtenemos:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 16$$

Igualando a cero la ecuación nos da:

$$x^2 + y^2 - 10x + 25 - 16 = 0$$

Reduciendo términos obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$$

Ejemplo 2.

La ecuación $(x + 3)^2 + y^2 = 25$ representa una circunferencia de centro C (-3, 0) y radio 5.

Ejemplo 3.

La ecuación $(x - 7)^2 + y^2 = 8$, representa una circunferencia de centro C.(7, *0)* y radio $\sqrt{8}$.

Segundo caso: *El centro* está en *el eje* de *las y*. Si llamamos *k* a la ordenada del centro, sus coordenadas son de la forma C (0, *k*). Procediendo análogamente al caso anterior se obtiene la ecuación:

$$x^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ejemplos.

La ecuación de la circunferencia de centro *C* (0, -4) y radio 5 es:

$$x^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 8y + 16 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 8y + 16 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$$

La ecuación $x^2 + (y - 8)^2 = 16$, representa una circunferencia de centro C (0,8) y radio = 4.

Ecuación cartesiana de la circunferencia*, cuando el centro es un punto cualquiera del plano.* Forma ordinaría de la ecuación de la circunferencia. Sea C (*h k*) el centro, *r* el radio y P (*x, y*) un punto cualquiera de la circunferencia figura 3 por definición:

CP = r.

Analíticamente será:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

que es la *ecuación cartesiana de una circunferencia de radio r y centro* un *punto cualquiera C (h, k) del plano.*

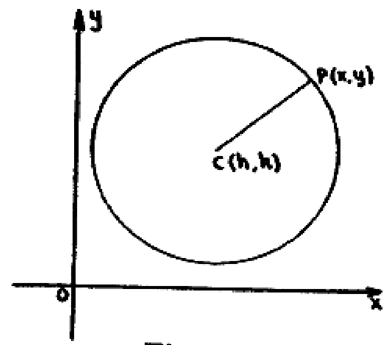


Fig. 3

(CECyTE Baja California, 2019)

Ejemplo.

- La ecuación $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ representa una circunferencia de radio, $r = 5$ y centro C (2,3).
- La ecuación de la circunferencia de centro C (-4, 2) y radio 4 es: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
- Hallar 1a ecuación de la circunferencia que tiene como centro C (-2, -3) y pasa por e1 punto A (2,4.).

El radio será la distancia

$$CA = \sqrt{(2-(-2))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$$CA = \sqrt{65}$$

y aplicando la ecuación *(D):*

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 2 = 65.$$

Condiciones para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia.

Forma general de la circunferencia. La ecuación general de segundo grado con dos variables forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + f = 0 \ (1)$$

y 1ra ecuación de una circunferencia de centro (*h, k*) y radio *r* es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Y desarrollando:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0, \ (2)$$

Para que 1a ecuación (1) representa una circunferencia, sus coeficientes y los de 1a (2) de los términos del mismo grado deben ser proporcionales.

Como la (2) carece de término xy, resulta: B = 0. (3)

Además, tendremos:

$$\frac{A}{1} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2h} = \frac{E}{-2k} = \frac{F}{h^2 + k^2 - r^2}$$

Luego:

A = C ≠ 0 para que la ecuación sea de segundo grado (5)

De las igualdades (3) y (5) resulta que, para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia es necesario:

1. Que no tenga término en xy
2. Que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales y del mismo signo.

Si una circunferencia viene dada por una ecuación de 1a forma:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se dice que viene dada en su *forma general.*

Ejemplos. Las ecuaciones:

1. $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 4 = 0$;
2. $2x^2 + 2y^2 + x + 4x + 1 = 0$;
3. $3x^2 + 3y^2 - x + y + 10 = 0$;
4. $-4x^2 - 4y^2 + 5x + y - 3 = 0$,

representan circunferencias dadas en su forma general.

Dada la ecuación e una circunferencia en su forma general, hallar su centro y radio. El problema puede resolverse de dos maneras.

Primer método: Convirtiendo la ecuación dada a la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

por el método de completar cuadrados. El centro es C *(h, k)* y el radio es *r.*

Segunda manera. A partir de la serie de razones iguales (4) del artículo anterior, tomando como incógnitas

h, k y *r.*

Ejemplos: 1. Hallar el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$$

Primer método. Completando cuadrados se tiene:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -9 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2-(y+3)^2=4$$

$$\therefore\ h=-2,\ k=-3,\ r=4=2.$$

$$\therefore\ C\,(-2,-3),\ r\ =\ 2\ .$$

Segundo método.

En este caso:

$$A=C=1,\ D=4,\ E=6,\ F=9.$$

De (4) resulta:

$$\frac{A}{1}=\frac{C}{1}=\frac{D}{-2h}=\frac{E}{-2k}=\frac{F}{h^2+k^2-r^2}$$

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{1}=\frac{1}{-2h}=\frac{6}{-2k}=\frac{9}{h^2+k^2-r^2}$$

$$\therefore\ h=2,\ k=4,\ r=3,\ C(2\ ,\ 1)\ y\ r=\ 3.$$

De otra forma: C (h,k) donde $h=-\frac{D}{2}$, $k=-\frac{E}{2}$

y $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-F^2}}{2}$

Para que exista circunferencia, el radio debe ser un número real positivo, luego:

$$D^2\ +\ E^2\ -\ 4F\ \ >0.$$

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ y el radio } r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la circunferencia se reduce a un solo punto.

Si , $D^2 + E^2 - 4F < 0$ el radio es imaginario y no existe circunferencia real.

Ejemplos:

La ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ representa una circunferencia real.

En efecto: D = 6, E = -2, F = 6

$D^2 + E^2 - 4F$ = 36 + 4 – 24 = 16 > 0

Calculando sus elementos se encuentra: C (- 3, 1) *r* = 2.

La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$ representa una circunferencia que se reduce a un solo punto.

En efecto: D = -4, *E* = 2, *F* = 5,

$D^2 + E^2 - 4F$ == 16 + 4 − 20 = 0

Hallando sus elementos el punto es C (2, -1) y el radio cero.

Ejercitando mi habilidad.

Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias:
1. Centro (0, 0) y radio 3.
2. Centro (2, -3) y radio 5.
3. Centro (3, -1/2) y radio 3.
4. Centro (- 1/2, 4) y radio 3/2.
5. Centro (-2/3, -1/2) y radio 2/3.
6. Centro (- 1/2, -1/3) y radio 3.
7. Centro (3, -1) y tangente al eje *Y.*

Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

8. $x^2 + y^2 = 4$.
9. $x^2 + y^2 = 4/9$.
10. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
11. $(x + 3)^2 + (y + 2)\ 2 = 4$.
12. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25/4$.
13. $x^2 + (y - 1\ )^2 = -2$.
14. $2x^2 + 2y2^2 + 8x - 6y + 7 = 0$.
15. $9x^2 + 9y^2 - 36x - 54y + 113 = 0$.
16. $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$.

¿Qué Aprendí?

Nombre:____.

Número de lista________________________. Lugar y fecha

____

______________. Grupo________________. Calificación

______________.

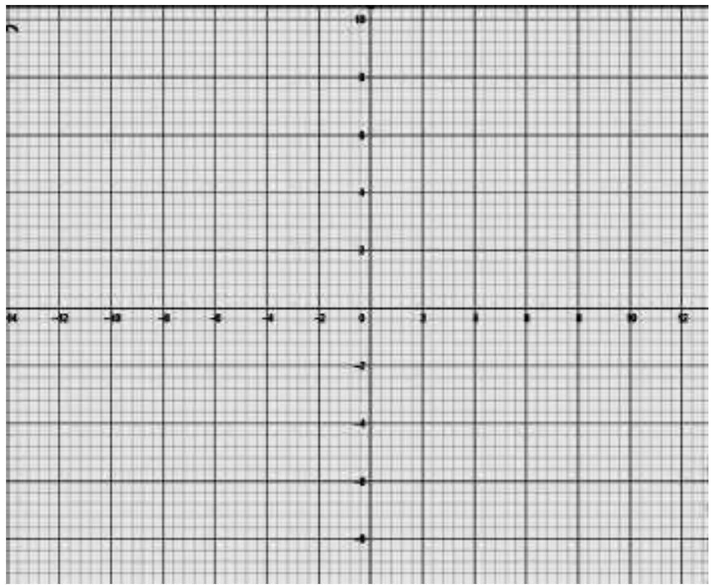
Con base en los conocimientos adquiridos, contesta los siguientes ejercicios y posteriormente intercambia con un compañero para realizar una coevaluación.

1. Lety va a comprar los discos que se utilizarán en la materia de informática para todo su grupo. el vendedor le dice que si compra 10 discos el precio será de 10 pesos cada uno, si compra 20 discos el precio será de 9.50 pesos cada, así hasta en mínimo de 6 pesos cuando compre la máxima cantidad.

¿Cuál es la ecuación que representa esta relación?

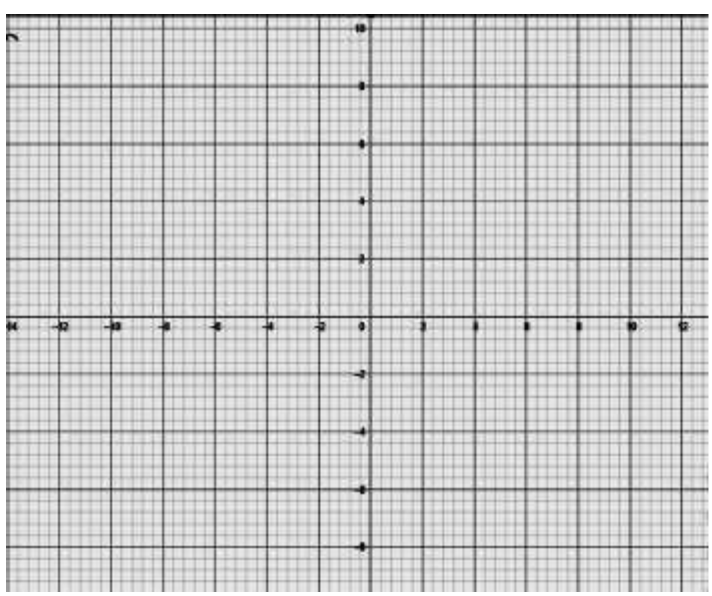
¿Si Lety compra 50 discos ¿Cuánto costara cada uno?

2. Calcula la pendiente el ángulo de inclinación y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es $x - 2y = 5$ (graficar)

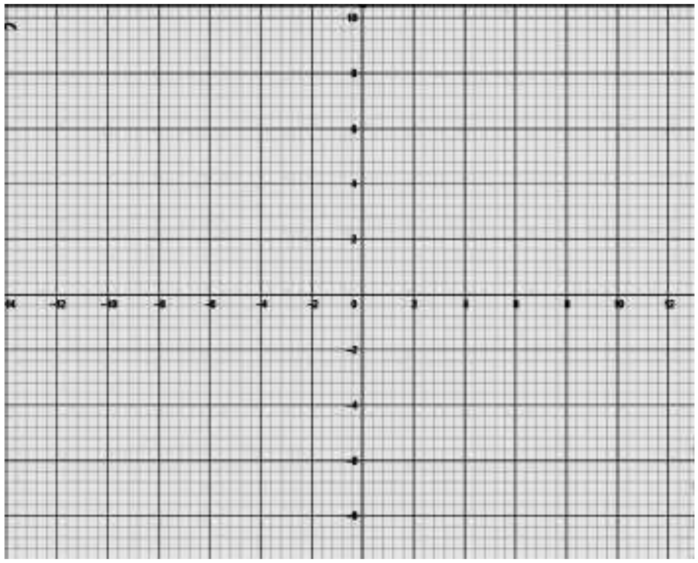


2. Luis va a comprar el carro de Manuel por \$45,000pesos y acordó pagarle \$1500pesos al mes.
   La ecuación $y = 45000 - 1500x$ representa la cantidad "y" que debe Luis después de "x" pagos.

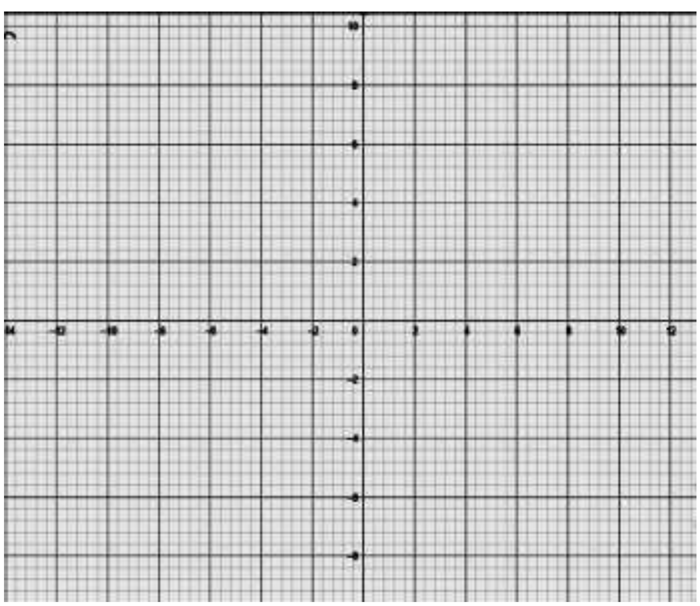
Realiza la gráfica de la ecuación que representa el problema planteado.



4. Si la circunferencia tiene su centro (1, - 3) y pasa por el punto (- 3, 5) ¿cuál es su ecuación? Y grafica



5. Una rueda de la fortuna tiene un diámetro de 18 mts. y su centro se encuentra a 10 mts. sobre el nivel del suelo, indique la altura de las costillas a 3 mts. a la izquierda del centro, indique a que distancia horizontal de la base se puede encontrar una canastilla con una altura de 12 mts.



TERCER PARCIAL

Contenido central	• Contenido específico	Aprendizaje esperado	Producto esperado
Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico.	¿Por qué los lugares geométricos tratados analíticamente resultan útiles para el tratamiento en diferentes situaciones contextuales? •Dibuja un cono y visualiza sus cortes. ¿Qué figuras reconoces?, ¿de qué depende la forma que tenga el corte sobre el cono? •Analiza los elementos de la ecuación general de las cónicas. ¿Por qué todas son de ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas? •Tabula y puntea en el plano distintos puntos de una parábola, lo mismo para una circunferencia, una elipse y una hipérbola. ¿Qué son las asíntotas?	Dibuja un cono y visualizan cortes prototípicos (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Analiza los elementos y la estructura de la ecuación general de segundo grado para las cónicas.	Trazar en un cono recto los cortes para encontrar una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola. Determinar la asíntota de una hipérbola dada y argumentar si se cruzan ambos lugares geométricos.

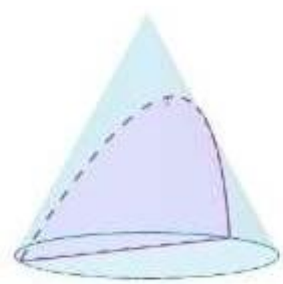
UNIDAD III

TERCER PARCIAL. PARÁBOLAS, ELIPSES E HIPÉRBOLAS.

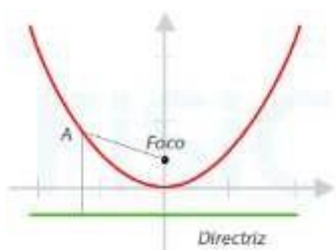
Para aprender más

LA PARÁBOLA.

La parábola es una sección cónica, resultado de la intersección de un cono recto con un plano que corta la base del mismo, oblicuo a su eje y paralelo a una generatriz de la superficie cónica.

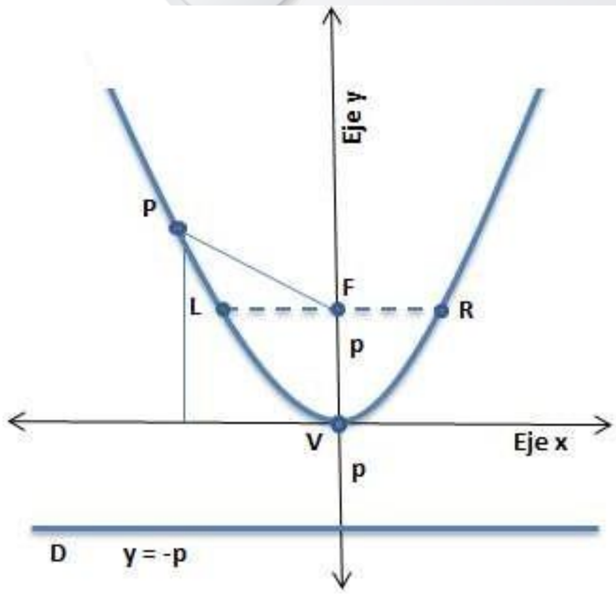


Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco y de una recta fija del mismo plano llamado directriz.



Parábola

Los elementos principales de una parábola son:



F Foco, es el punto fijo F, los puntos de la parábola equidistan del foco y la directriz. El foco tiene coordenadas: $F\ (x_F,\ y_F)$

D Directriz, es la recta constante D, los puntos de la parábola equidistan de la directriz y el foco.

V Vértice, el punto V donde la parábola intersecta al eje. El vértice tiene coordenadas: $V\ (h,\ k)$

LR Lado recto.

P es un punto cualquiera en la parábola, tiene coordenadas: $\mathbf{P}\ (\mathbf{x_P},\ \mathbf{y_P})$

p es él parámetro p, es la distancia que hay entre el Foco F y el Vértice V y la misma distancia entre el vértice V y la directriz D.

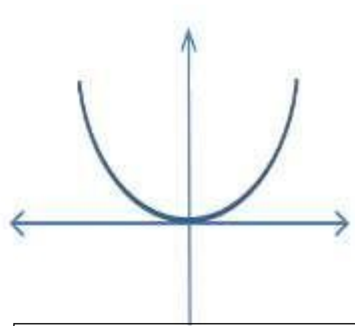
La línea recta formada por el Vértice y el Foco se llama **EJE FOCAL (eje de la parábola)**, y es el eje de simetría y determina si la parábola es horizontal o vertical.

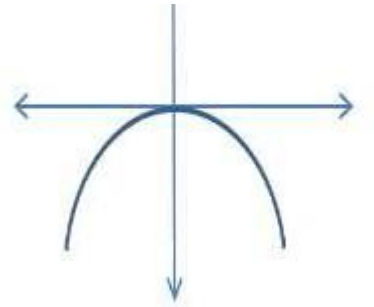
Excentricidad de la parábola. Es siempre es 1, de esto deriva que todas las parábolas son semejantes, variando su apariencia de abiertas a cerradas de acuerdo a la escala.

Ecuación de la parábola.

Con vértice en el origen, la ecuación de la parábola puede presentarse de 4 formas distintas:

Parábola vertical con vértice en el origen.





$$x^2 = 4py$$

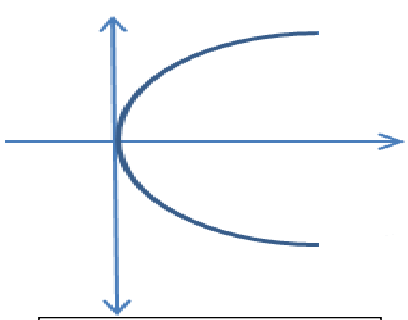
$$x^2 = -4py$$

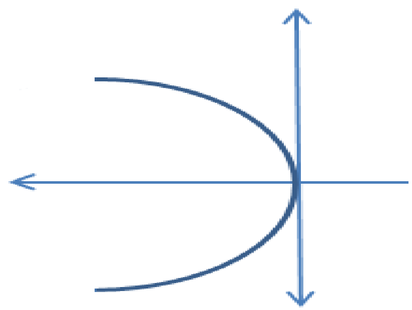
Parámetro $\mathbf{p = y_f - k}$

Directriz $directriz = -p$

Como se observa, la única diferencia entre las dos ecuaciones es el signo, es decir, en la parábola de la izquierda es positiva y la parábola de la derecha es negativa. La positiva abre hacia arriba y la negativa abre hacia abajo.

PARÁBOLA HORIZONTAL CON VÉRTICE EN EL ORIGEN.





$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = -4px$$

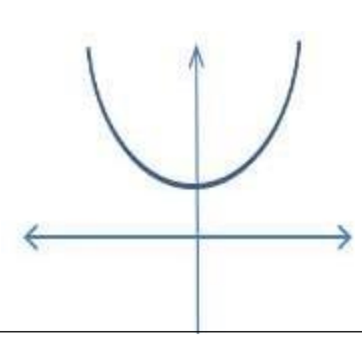
Parámetro $\mathbf{p = x_f - h}$

Directriz $directriz = -p$

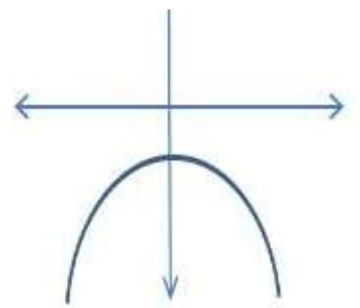
Como se observa, la única diferencia entre las dos ecuaciones es el signo, es decir, en la parábola de la izquierda es positiva y la parábola de la derecha es negativa. La positiva abre hacia la derecha y la negativa abre hacia la izquierda.

En los casos en los que la parábola tiene su vértice fuera del origen las ecuaciones se presentan de la siguiente manera:

PARÁBOLA VERTICAL CON EJE FUERA DEL ORIGEN.



$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

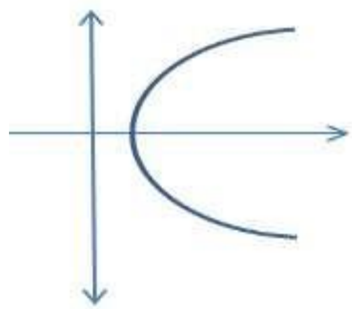


$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

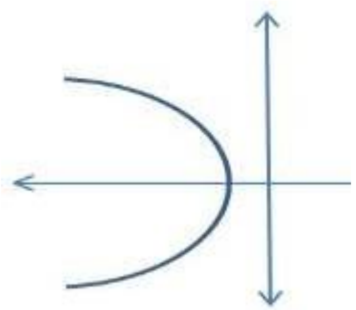
<u>Parámetro</u> $p = y_f - k$

<u>Directriz</u> $\text{directriz} = -p$

Parábola horizontal con vértice fuera del origen



$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$



$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

<u>Parámetro</u> $p = x_f - h$

<u>Directriz</u> $\text{directriz} = -p$

estas ecuaciones son conocidas como la forma canónica de la ecuación de la parábola, para, escribir la forma general es necesario desarrollar el binomio al cuadrado que hay en cada ecuación canónica.

Actividad. Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Encuentra los elementos que se indican de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 20x$ 1. V=_________ 2. F=_________ 3. p=_________ 4. directriz=_____	b) $x^2 = -32y$ 1. V=_________ 2. F=_________ 3. p=_________ 4. directriz=_____	c) $x^2 = 8y$ 1. V=_________ 2. F=_________ 3. p=_________ 4. directriz=_____
d) $(x-4)^2 = 20(y-2)$ 1. V=_________ 2. p=_________ 3. directriz=_____	e) $(y-3)^2 = 8(x-2)$ 1. V=_________ 2. p=_________ 3. directriz=_____	f) $(x-4)^2 = 36(y-3)$ 1. V=_________ 2. p=_________ 3. directriz=_____

2. A partir de los siguientes datos construye la ecuación de la parábola:

Parábola Vertical			
a) V= (0 , 0) F= (0 , 3)	b) V= (0 , 0) F= (0 , 6)	c) V= (2 , 5) F= (2 , 8)	d) V= (4 , -2) F= (4 , 3)
Parábola Horizontal			
e) V= (0 , 0) F= (2 , 0)	f) V= (0 , 0) F= (4 , 0)	g) V= (1 , 2) F= (2 , 2)	h) V= (3 , 7) F= (1 , 7)

Para aprender más

Si desarrollamos el binomio que se encuentra descrito en la ecuación canónica de la parábola

$$\boxed{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{4p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})}$$

Entonces obtenemos la formula general:

Parábola vertical:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

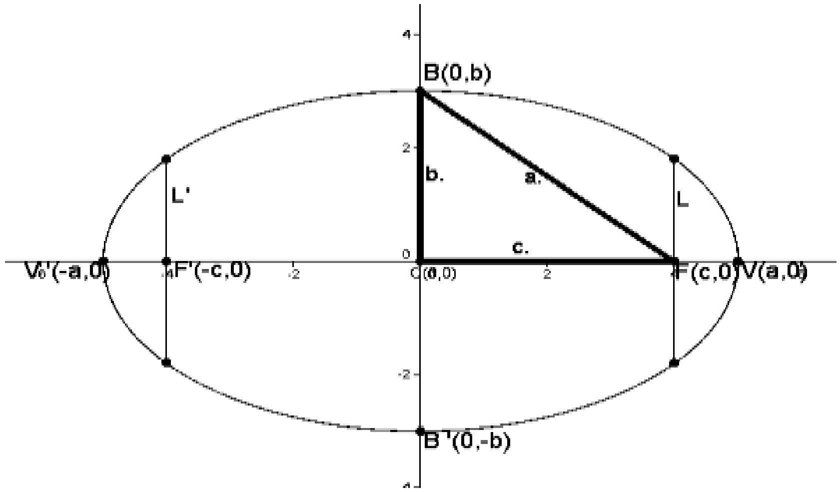
Parábola horizontal:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ELIPSE

Definición

La Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de dicho plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los puntos fijos.



Para aprender más

ELEMENTOS DE LA ELIPSE

V y V' = vértices

VV' = eje mayor

VV' = 2a

CV = a

B y B' = extremos del eje menor

BB' = eje menor

BB' = 2b

CB = b

F y F' = focos

FF' = distancia focal

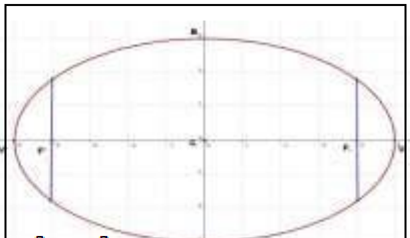
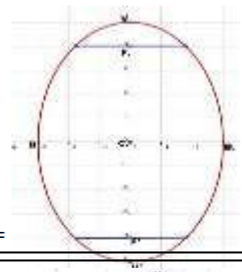
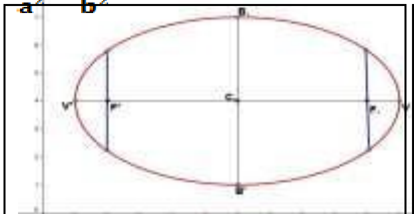
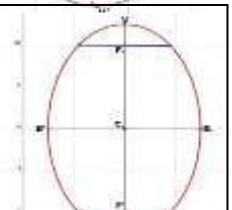
FF' = 2c

CF = c

L y L' = lado recto o ancho focal

Lado recto = LR = $\frac{2b^2}{a}$

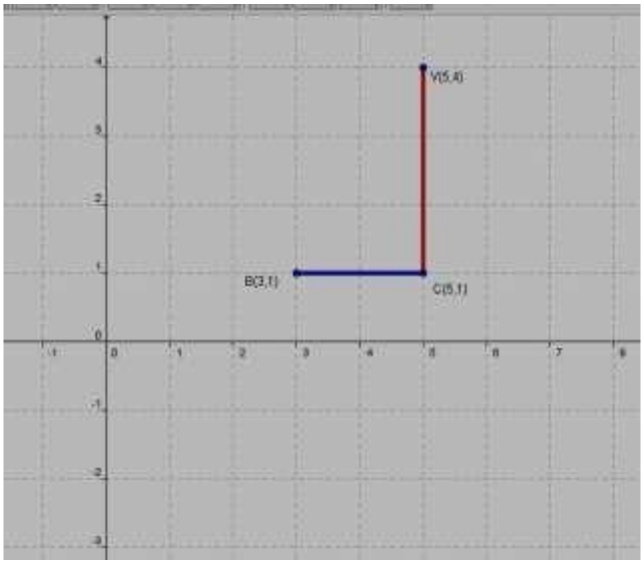
Teorema de Pitágoras = $a^2 = b^2 + c^2$

	HORIZONTAL	VERTICAL
CON CENTRO EN EL ORIGEN	 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=$
CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN	 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	 $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Ejemplos.

1. Escribe la ecuación de la elipse de centro C (5,1) un vértice (5,4) y un extremo del eje menor (3,1)

Se representan gráficamente los datos proporcionados en el enunciado y se calculan los otros datos para terminar la gráfica.



CV= a

a = 3

CB = b

b = 2

$$\frac{2b^2}{a}$$

$$\frac{2(2)^2}{3}$$

$$\frac{8}{3}$$

línea que une el vértice con el foco es la mitad del eje mayor, se trata de una elipse vertical con centro fuera del origen

se selecciona la fórmula

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$a^2 = b^2 +$$

$$c^2 \; 3^2 = 2^2$$

$$+ \; c^2$$

$$9 = 4 + c^2$$

$$9 - 4 = c^2 \quad 5 = c^2 \quad c = \sqrt{17}$$

De manera simétrica tres unidades hacia abajo del centro, se ubica el otro vértice V'(5,-2), a la derecha del centro el otro extremo del eje menor B(7,1), a una distancia de $\sqrt{17}$ hacia arriba del centro y hacia abajo se ubican los focos

F(5,4+ $\sqrt{17}$) F'(5, 4 - $\sqrt{17}$)

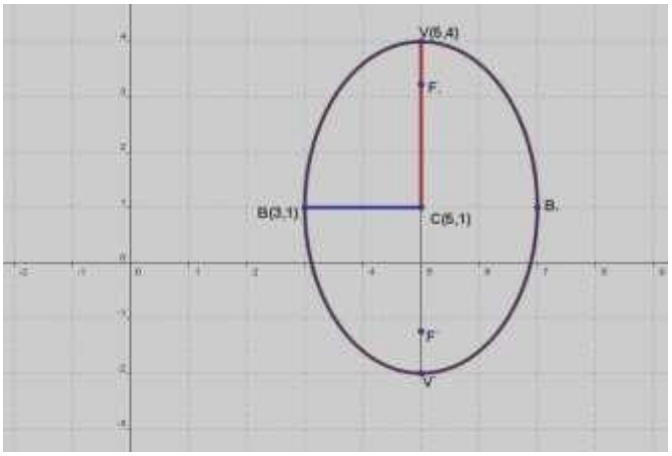
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-5)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2-10x+25}{4} + \frac{y^2-2y+1}{9} = 1$$

$$\frac{9(x^2-10x+25)+4(y^2-2y+1)}{36} = 1$$

$$\frac{9x^2-90x+225+4y^2-8y+4)}{36} = 1$$

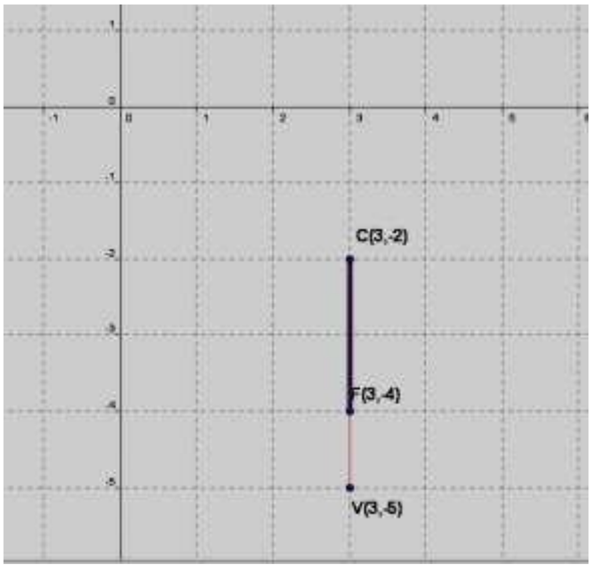


$$9x^2 - 90x + 225 + 4y^2 - 8y + 4 = 36$$

$$9x^2 - 90x + 225 + 4y^2 - 8y + 4 - 36=0$$

$$9x^2 + 4y^2 - 90x - 8y + 193 = 0$$

2. Escribe la ecuación de la elipse de centro C (3,-2), un foco (3,-4) y un vértice (3,-5).



CV = a **lado recto Teorema de Pitágoras**

a = 3

CF = c

c = 2

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

$$lr = \frac{2\sqrt{5}^2}{3}$$

$$lr = \frac{10}{3}$$

$a^2=b^2+c$

2

$3^2=b^2+2$

2

$9=b^2+4$

$9 - 4 = b^2$

$b = \sqrt{5}$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{\sqrt{5}^2}+\frac{[y-(-2)]^2}{3^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2-6x+9}{5}+\frac{y^2+4y+4}{9}=1$$

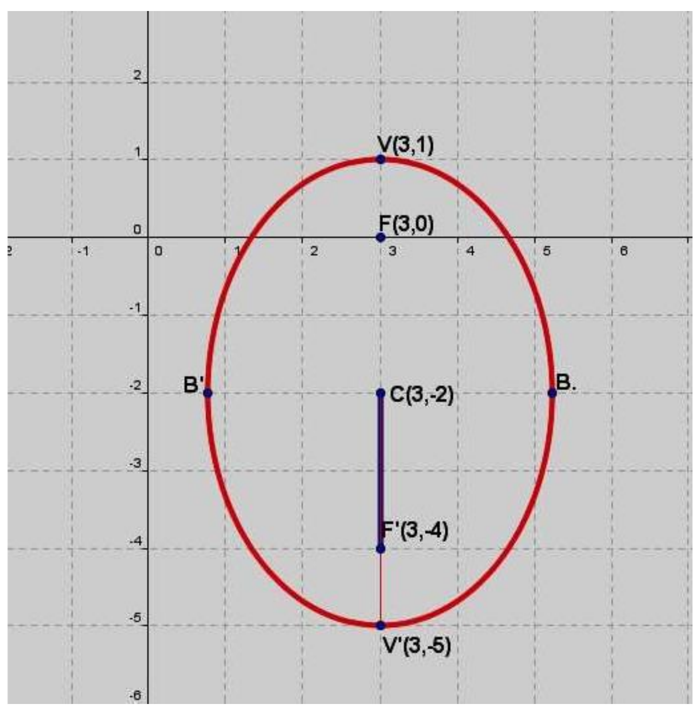
$$\frac{9(x^2-6x+9)+5(y^2+4y+4)}{45}=1$$

$$\frac{9x^2-54x+81+5y^2+20y+20}{45}=1$$

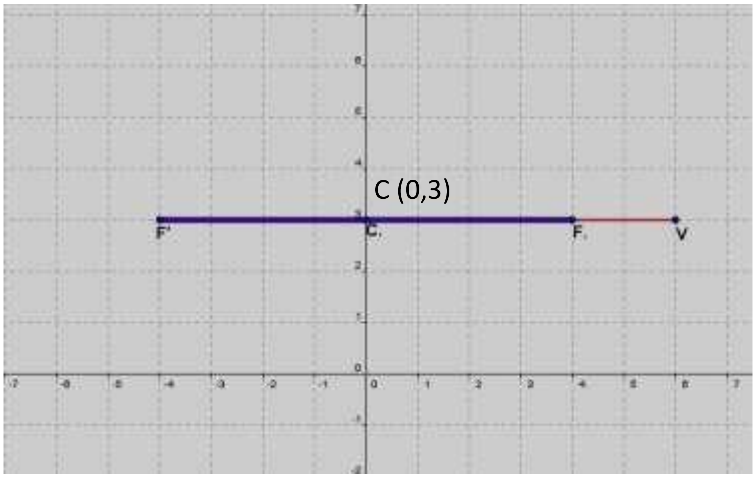
$9x^2 - 54x + 81 + 5y^2 + 20y + 20 = 45$

$9x^2 - 54x + 81 + 5y^2 + 20y + 20 - 45 = 0$

$9x^2 + 5y^2 - 54x + 20y + 56 = 0$



3. Escribe la ecuación de la elipse si uno de sus vértices es el punto (6,3) y sus focos (-4,3) y (4,3)



CV = a

CF = c C = 4

$a^2 = b^2 + c^2$

$a = 6$

$6^2 = b^2 + 4^2$

$36 = b^2 + 16$

$36 - 16 = b^2$

$20 = b^2$

$b = \sqrt{20}$

Lado recto

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

$$lr = \frac{2\sqrt{20}^2}{6}$$

$$lr = \frac{2(20)}{6}$$

$$lr = \frac{40}{6}$$

$$lr = \frac{20}{3}$$

Ecuación de la elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{6^2} + \frac{(y-3)^2}{\sqrt{20}^2} = 1$$

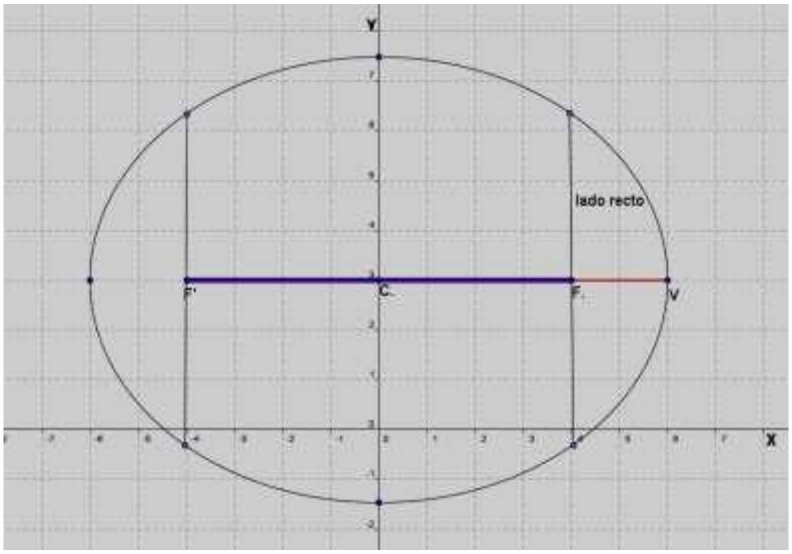
$$\frac{(x^2}{36} + \frac{y^2-6y+9}{20} = 1$$

$$\frac{5x^2+9(y^2-6y+9)}{180} = 1$$

$5x^2 + 9y^2 - 54y + 81 = 180$

$5x^2 + 9y^2 - 54y + 81 - 180 = 0$

$5x^2 + 9y^2 - 54y - 99 = 0$



Actividad. Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Escribe la ecuación de la elipse cuyos extremos del eje menor (-1,2) (-1,-4) y un foco (1,-1)

2. Escribe la ecuación de la elipse de vértices (-5,0) (5,0) y longitud del lado recto igual a 8/5

3. Escribe la ecuación de la elipse de cuyos vértices son los puntos (-9,5) y (1,5) y la longitud de su lado recto igual a 3.

- $3x^2 + 24x + 48 + 10y^2 – 100y + 250 – 75 = 0$
- $3x^2 + 10y^2 + 24x – 100y + 223 = 0$

Ejemplo.

dada la ecuación de la elipse en forma general, encontrar sus elementos principales y su gráfica.

Dada la ecuación de la elipse $16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = 0$, hallar:

a) Coordenadas del centro
b) Coordenadas de los vértices
c) Coordenadas de los focos
d) Longitud del lado recto
e) Longitud del eje mayor
f) Longitud del eje menor
g) Excentricidad

$$16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = 0$$

Se pasa al segundo miembro el término independiente

$$16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y = -400$$

Se agrupan los términos que contienen la misma incógnita

$$(16x^2 + 160x) + (25y^2 + 200y) = -400$$

Se divide cada paréntesis por el coeficiente de cada término cuadrático

$$16(x^2 + 10x) + 25(y^2 + 8y) = -400$$

Se complementa el trinomio cuadrado prefecto en cada paréntesis y se agregan las mismas cantidades en el segundo miembro

$$16(x^2 + 10x + 25) + 25(y^2 + 8y + 16) = -400 + 400 + 400$$

Se factoriza en cada paréntesis y se reduce en el segundo

$$16(x+5)^2 + 25(y+4)^2 = 400$$

Se divide toda la expresión por el número que resulta en el segundo miembro

$$\frac{16(x+5)^2}{400} + \frac{25(y+4)^2}{400} = \frac{400}{400}$$

Queda la ecuación reducida a la forma ordinaria

$$\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

a>b el denominador mayor está en la primera fracción e indica que la elipse es horizontal.

Centro C (-5,-4)

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=25$

$a=5$

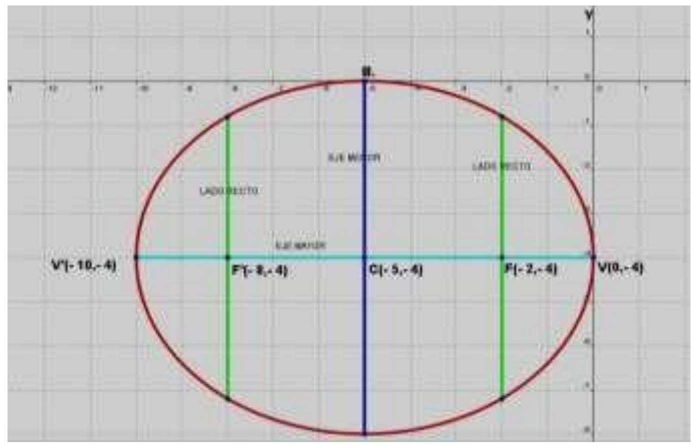
$b^2=16$

$b=4$

Vertices V (0,-4)   V' (-10,-4)

25 – 16 = c^2 c = √9

Focos F (-2,-4)   F' (-8,-4)



Lado recto

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4^2)}{5} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5}$$

Eje mayor = VV' = 2a 2a = 10 Eje menor = BB' = 2b 2b = 8

Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo.

Dada la ecuación de la elipse $16x^2 + 4y^2 + 32x – 16y – 32 = 0$, hallar:

a) Coordenadas del centro
b) Coordenadas de los vértices
c) Coordenadas de los focos
d) Longitud del lado recto
e) Longitud del eje mayor
f) Longitud del eje menor
g) Excentricidad

$$16x^2 + 4y^2 + 32x - 16y - 32 = 0$$

$$16x^2 + 4y^2 + 32x - 16y = 32$$

$$\mathbf{(16x^2 + 32x) + (4y^2 - 16y) = 32}$$

$$16(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = 32$$

$$16(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = 32 + 16 + 16$$

$$16(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 64$$

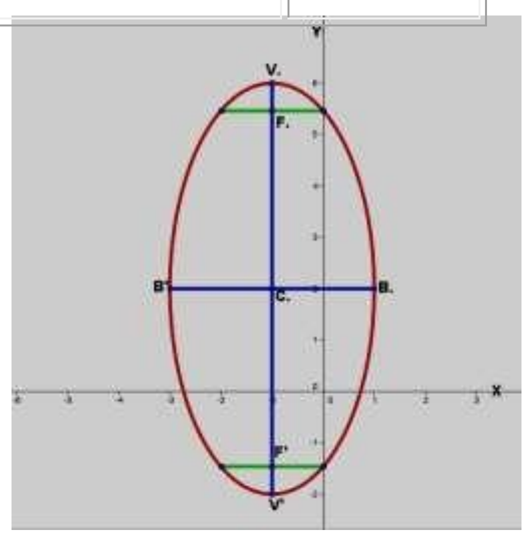
$$\frac{16(x+1)^2}{64} + \frac{4(y-2)^2}{64} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{4(y-2)^2}{16} = 1}$$

El primer denominador es menor por lo tanto la elipse es vertical.

Centro **C(-1,2)** a^2=16 a=4 **Vértices** **V(-1,6)** **V'(-1,-2)** **Focos** **F(-1,2+√12)** **F'(-1,2-√12)**	b^2=4 b=2 a^2=b^2+c^2	16 = 4 + c^2 16 – 4 = c^2 12 = c^2
LADO RECTO		C = √12

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{4} = \frac{2(4)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$



Eje mayor = VV' = 2a 2a = 8 Eje

menor = BB' = 2b 2b = 4

Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{(4)(3)}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Actividad. Realiza los siguientes ejercicios.

1. Dada la ecuación de la elipse $x^2 + 4y^2 + 10x - 40y + 109 = 0$, hallar:

   a) Coordenadas del centro
   b) Coordenadas de los vértices
   c) Coordenadas de los focos
   d) Longitud del lado recto
   e) Longitud del eje mayor
   f) Longitud del eje menor
   g) Excentricidad

2. Dada la ecuación de la elipse $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$, hallar:

   a) Coordenadas del centro
   b) Coordenadas de los vértices
   c) Coordenadas de los focos
   d) Longitud del lado recto
   e) Longitud del eje mayor
   f) Longitud del eje menor
   g) Excentricidad

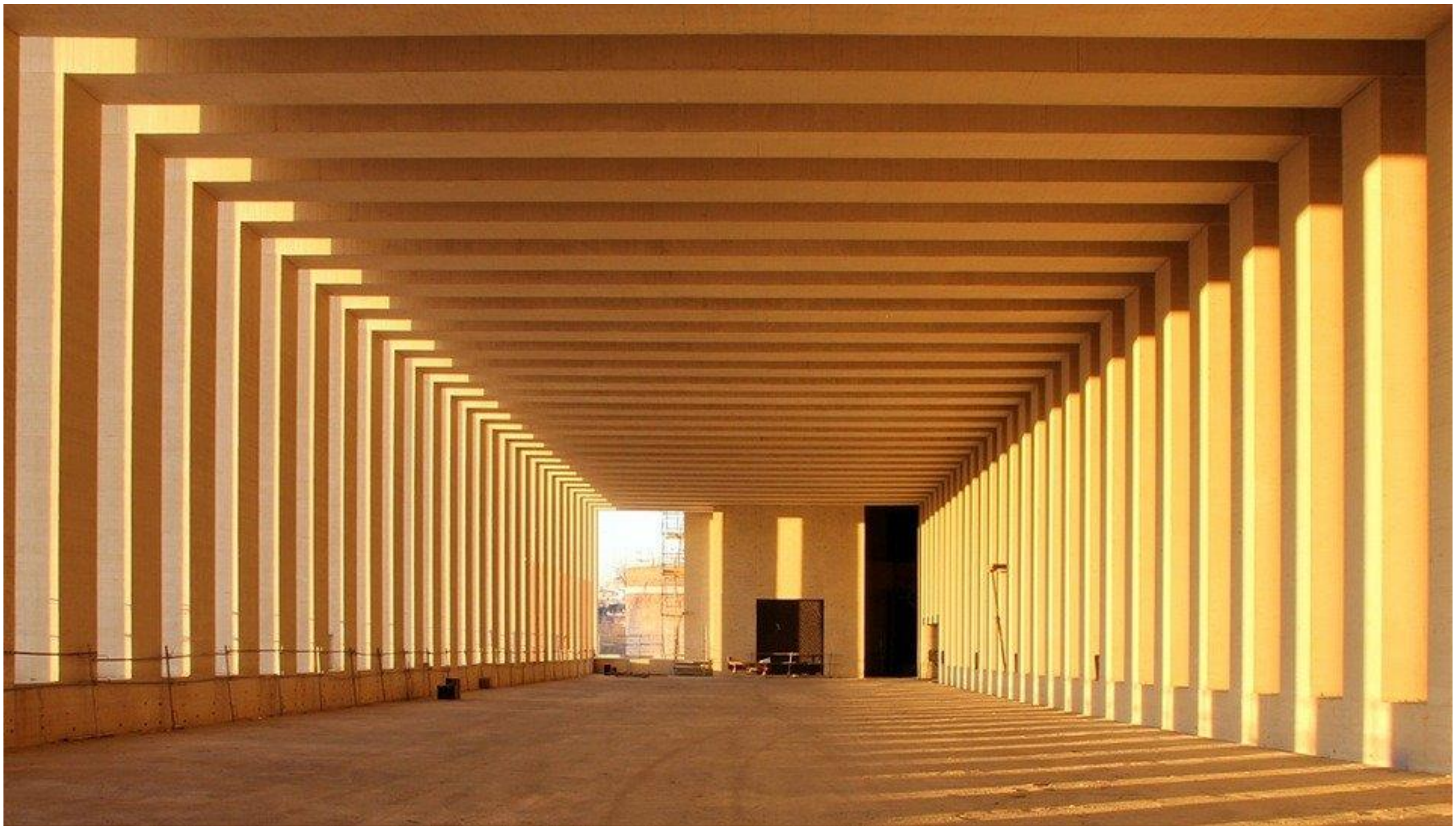
3. Dada la ecuación de la elipse $3x^2 + 2y^2 + 24x - 12y + 60 = 0$, hallar:

   a) Coordenadas del centro
   b) Coordenadas de los vértices
   c) Coordenadas de los focos
   d) Longitud del lado recto
   e) Longitud del eje mayor
   f) Longitud del eje menor
   g) Excentricidad

4. Dada la ecuación de la elipse $4x^2 + 8y^2 - 4x - 24y - 13 = 0$, hallar:

a) Coordenadas del centro
b) Coordenadas de los vértices
c) Coordenadas de los focos
d) Longitud del lado recto
e) Longitud del eje mayor
f) Longitud del eje menor
g) Excentricidad

Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com



Para aprender más

HIPÉRBOLA

Definición de la hipérbola

Una *hipérbola* es el conjunto de puntas del plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una diferencia constante. Con esto queremos decir que tomamos la diferencia de la distancia mayor menos la distancia menor. Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la hipérbola. El punto medio entre los dos focos se llama *centro* de la hipérbola.

HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN

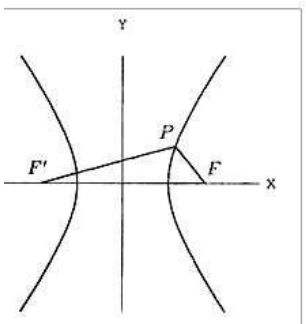
Empecemos con el análisis de una hipérbola con centro en el origen y que abre en el eje *X.* Supongamos que las coordenadas de los focos son *F (c*, 0) y *F' (-c,* 0). Para que un punto *P (x, y)* pertenezca a la hipérbola, debe satisfacer

$$d\,(P, F) - d(P\,, F') = k, \ (1)$$

$$d\,(P, F') - d(P, F) = k, \ (2)$$

donde *k* es una constante (ver figura siguiente).

Sustituyendo las coordenadas de *P, F* y *F'* en la fórmula de la distancia entre dos puntos, la expresión
queda:



Hipérbola horizontal

Trabajamos ahora de una manera muy similar a como lo hicimos en el caso de la elipse.

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado,

$$(x - c)^2 + y^2 = (\sqrt{k + (x + c)^2 + y^2},$$

Simplificando obtenemos:

$$-4cx - k^2 = 2k\ y\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Volvemos a elevar al cuadrado para eliminar el otro radical y simplificamos nuevamente:

$$4(4c^2 - k^2)\ x^2 - 4k^2\ y^2 = k^2\ (4c^2 - k^2\ ),$$

para poder seguir simplificando, observemos la figura anterior. Si llamamos $a = \frac{k}{2}$ podemos ver que los puntas $V\ (a, 0)\ y\ V'(-a\ ,0)$ pertenecen a la hipérbola. Sustituyendo $k = 2a$ en la fórmula anterior tenemos

$$(c^2 - a^2)\ x^2 - a^2y^2 = a^2\ (c^2 - a^2\ ).$$

Llamando $b^2 = c^2 - a^2$, llegamos a: $b^2x^2 - a^2\ y^2 = a^2b^2$. (3)

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre a^2b^2 llegamos a la ecuación *simétrica* de la hipérbola:

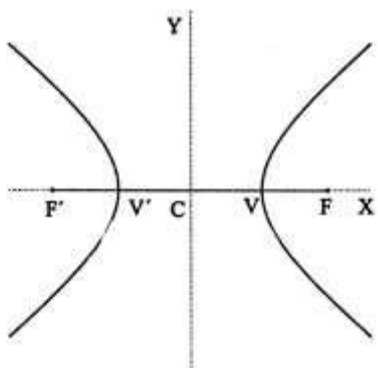
Ecuación entre llegamos a^2b^2 la ecuación *simétrica* de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si en lugar de trabajar con (1) trabajamos con (2), llegamos a la misma ecuación. Si en la ecuación (3) pasamos todos los términos al primer miembro, nos queda la ecuación de la hipérbola en la forma *general:*

$$b^2x^2 - a^2\,y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Veamos ahora algunos de los elementos principales de la hipérbola, ver siguiente figura.



Elementos de la hipérbola

Como en el caso de la elipse, los puntos *V* y *V'* se llaman *vértices* de la hipérbola.

La recta que une a los vértices *V* y *V'* se llama *eje focal.* El punto medio de *F* y *F'* y por tanto, también de *V* y *V'* es el *centro C* de la hipérbola.

La recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal se llama *eje no focal*.

Observa que tanto el eje focal como el eje no focal de la hipérbola son *ejes de simetría.*

La distancia entre los dos focos *F* y *F'* se llama *distancia focal* y vale *2c.*

La distancia entre los dos vértices *V* y *V'* es *2a.*

Notemos que, a diferencia del caso de la elipse, ahora se tiene c > *a.*

Si la hipérbola tiene centro en el origen y sus focos están en el eje *Y,* las coordenadas de ellos son *F (0,* c) y *F'(0, -c),* si llamamos nuevamente *2a* a la diferencia de las distancias de un punto *P (x, y)* de la hipérbola.

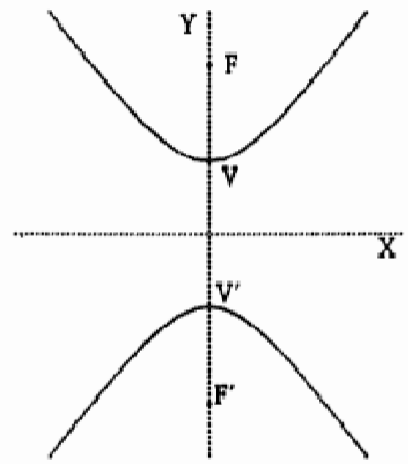
a los focos, haciendo un análisis similar al anterior, o simplemente intercambiando los papeles de *x* y *y*,

llegamos ahora a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Los vértices son ahora V (0, a) y V'(0, -a). (Ver siguiente figura).



Hipérbola vertical

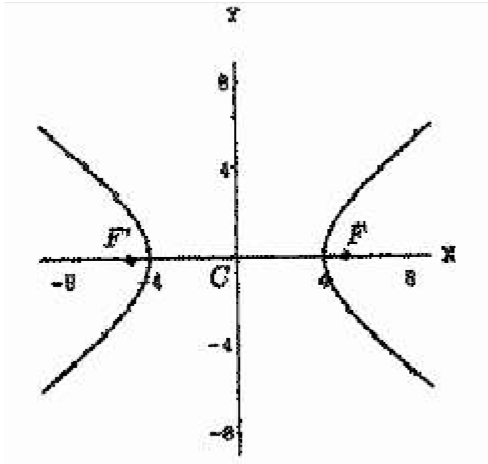
Ejemplos:

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son *F(5,* 0) Y *F'(* -5,0), y tal que la diferencia de las distancias de los puntos de ella a los focos sea 8. (Ver la figura de la página siguiente).

Solución:

El punto medio entre los focos es C (0,0) y los focos están sobre el eje X, así que su ecuación es de la forma (4), la

distancia entre los focos es 2c = 10 y la distancia entre los vértices es 2a == 8, entonces $b^2 = 52 - 42 = 9$ y la ecuación de la hipérbola es:



Hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son: *V(0,2)* y *V'(0,* -2) y sus focos son *F(0,* 10) y *F'(0,* -10). (Ver la figura de la página siguiente).

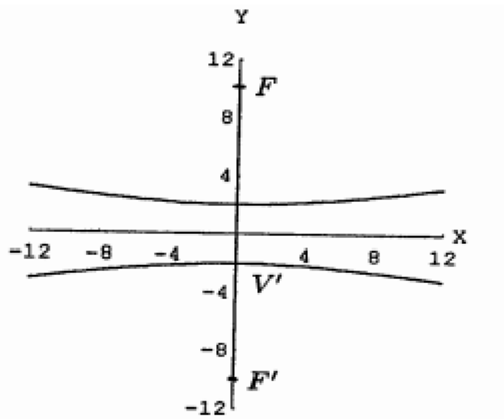
Solución:

Nuevamente el centro es C (0, 0), los focos están ahora sobre el eje *Y,* la distancia focal es 2c = 20, la distancia

entre los vértices es *2a* = 4, entonces $b^2 = 10^2 - 2^2 = 96$ y la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{96} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{96} = 1.$$



Hipérbola $-\frac{x^2}{96} + \frac{y^2}{4} = 1$

ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA

Si despejamos y de la ecuación (3) obtenemos:

y b x2 a2

a

=± − ,

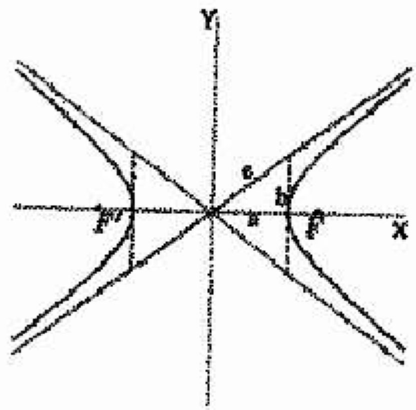
ahora, si x es muy grande, x^2 -a^2 es "casi igual" a x^2 y, por lo tanto

$x^2 - a^2$ es casi igual a x, es decir, para x grande (ya sea positiva o negativa), y es "casi igual" a b x a ± o sea que las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas: y b x

a

$$y = \frac{b}{a} \quad Y \quad y = -\frac{b}{a}$$

este par de rectas se llaman asíntotas de la hipérbola. Observa que las asíntotas, el eje X y las rectas verticales que pasan por los vértices de la hipérbola, forman triángulos rectángulos cuyos catetos miden a y b y la hipotenusa mide c. Esta observación es importante para poder trazar las hipérbolas como podemos ver en los siguientes ejemplos. (Ver la siguiente figura).



Asíntotas de la hipérbola

Ejemplos:

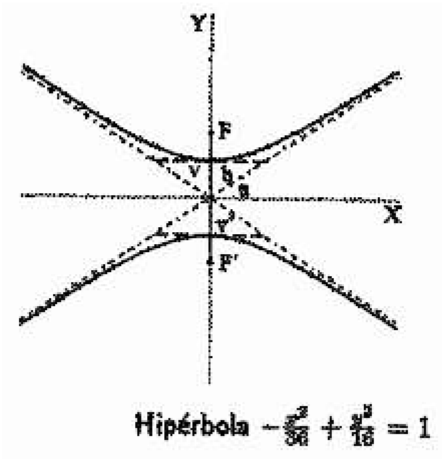
Dibujar la hipérbola cuya ecuación es: $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}$

Solución:

El signo (-) esta antes de x2, entonces la hipérbola es vertical, $a^2 = 16$ y $b^2 = 36$, así que $c^2 = 16 + 36 = 52$ y por lo tanto a = 4, b = 6 y c = 52 ≈ 7.21. Tenemos entonces que los focos son F (0, 52) y F'(0, - 52); los vértices son V (0,4) y V'(O, -4).

Marcamos los vértices y dibujamos los triángulos con catetos a y b, como ayuda para trazar las asíntotas.

Trazamos ahora las hipérbolas como curvas suaves que salen de los vértices y se aproximan a las asíntotas. (Ver la siguiente figura).



Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com junio 2021

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Gordon Fuller y Dalton Tarwater. 7ª. Ed. (1995). *Geometría Analítica*. Addison – Wesley Iberoamericana
- Elena de Oteyza, Emma Lam Osnaya, José Antonio Gómez, Arturo Ramírez Flores
- *Geometría Analítica*. 1ª, Ed (1994)
- Benjamín Garza Olvera. 6ª Reimpresión (2003). *Geometría Analítica. DGTI*
- Irma Fuenlabrada Velásquez, Javier León Sarabia. Geometría Analítica. Ed. Rev. (2004). Mc. Graw Hill.
- Baltasar Júnez Vega, Armando López Zamudio, Rafael Rojas Rojas. *Matemáticas III. Geometría Analítica.* 1ª. (2004) **DGETI**
- Francisco José Ortiz Campos. *Geometría Analítica*. 8ª.(2002). Publicaciones cultura
- Gordon Fuller y Dalton Tarwater. 7ª. Ed. (1995). *Geometría Analítica*. Addison – Wesley Iberoamericana
- Elena de Oteyza, Emma Lam Osnaya, José Antonio Gómez, Arturo Ramírez Flores
- *Geometría Analítica*. 1ª, Ed (1994)
- Benjamín Garza Olvera. 6ª Reimpresión (2003). *Geometría Analítica. DGTI*
- Irma Fuenlabrada Velásquez, Javier León Sarabia. Geometría Analítica. Ed. Rev. (2004). Mc. Graw Hill.
- Baltasar Júnez Vega, Armando López Zamudio, Rafael Rojas Rojas. *Matemáticas III. Geometría Analítica.* 1ª. (2004) DGE**TI**
- Francisco José Ortiz Campos. *Geometría Analítica*. 8ª.(2002). Publicaciones cultura
- Gordon Fuller y Dalton Tarwater. 7ª. Ed. (1995). *Geometría Analítica*. Addison – Wesley Iberoamericana
- Elena de Oteyza, Emma Lam Osnaya, José Antonio Gómez, Arturo Ramírez Flores
- *Geometría Analítica*. 1ª, Ed (1994)
- Benjamín Garza Olvera. 6ª Reimpresión (2003). *Geometría Analítica. DGTI*
- Irma Fuenlabrada Velásquez, Javier León Sarabia. Geometría Analítica. Ed. Rev. (2004). Mc. Graw Hill.
- Baltasar Júnez Vega, Armando López Zamudio, Rafael Rojas Rojas. *Matemáticas III. Geometría Analítica.* 1ª. (2004) DGE**TI**
- Francisco José Ortiz Campos. *Geometría Analítica*. 8ª.(2002). Publicaciones cultura Delia Barajas Aceves. (2019). Geometría Analítica.Mipliformas.
- Miguel Ángel Martínez.(2019). Geometría Analítica.McGrawHill Charles H. Lehmann.(2019).Geometría Analítica.Limusa Joseph H. Kindle.(2019).Geometría Analítica.McGrawHill

SITIOS WEB

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/

http://www.elosiodelosantos.com/sergiman/div/geometan.html

http://jfinternational.com/mf/geometria-analitica.html

http://expo.cvh.edu.mx/proyectos/TISGGRG/99348/99348.htm

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/

http://www.elosiodelosantos.com/sergiman/div/geometan.html

http://jfinternational.com/mf/geometria-analitica.html

http://expo.cvh.edu.mx/proyectos/TISGGRG/99348/99348.htm

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/

http://www.elosiodelosantos.com/sergiman/div/geometan.html

http://jfinternational.com/mf/geometria-analitica.html

http://expo.cvh.edu.mx/proyectos/TISGGRG/99348/99348.htm

CULTURA DIGITAL

Geogebra.

Es una aplicación libre de matemática para la educación en todos sus niveles, muy completa, sencilla y potente. Reúne **dinámicamente**, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Sencillamente… ¡una maravilla!

PhotoMath.

Se trata de una **calculadora con cámara**. Sólo tienes que apuntar con tu cámara a una operación matemática y PhotoMath mostrará instantáneamente el resultado. Utilízala para obtener ayuda cuando te bloquees con un problema. Pulsa el botón ‘pasos’ y verás toda la **solución paso a paso**. Actualmente admite aritmética básica, fracciones, números decimales, ecuaciones lineales y varias funciones como logaritmos… aunque como todo, supongo que se irá complementando. Tiene una pega: no admite texto escrito a mano, sólo problemas impresos en libros… pero todo se andará.

HandyCalc Calculator.

Se trata de una **calculadora gráfica potente** con la que puedes resolver ecuaciones, funciones y operaciones aritméticas y trigonométricas. Permite también programar tus funciones con múltiples variables, realizar conversiones de unidades y divisas y representar funciones gráficas. Lo más destacable es su estupendo soporte de gráficas y la corrección de sintaxis antes de calcular el resultado.

Desmos Calculadora Graficadora.

Muy buena y completa. Te permite visualizar las matemáticas de una forma intuitiva y amena. Cómo dicen sus creadores: la clave es aprender haciendo. De forma instantánea genera cualquier función, desde rectas y parábolas hasta derivadas y series de Fourier. Podemos trazar graficas polares, cartesianas o paramétricas, sin límite para el número de expresiones que puede mostrar a la vez. Permite ajustar valores de forma interactiva o variar cualquier parámetro para visualizar su efecto sobre la gráfica. Se pueden utilizar tablas, encontrar rectas de mejor ajuste, parábolas y más, buscar máximos, mínimos y puntos de intersección en una gráfica, o simplemente utilizar la calculadora científica, con raíces cuadradas, logaritmos, valor absoluto, y más. Nos permite también representar desigualdades cartesianas y polares.

Mathway.

Es una aplicación que permite realizar online diferentes **cálculos** matemáticos de áreas como las matemáticas básicas, pre-álgebra, álgebra, pre-cálculo, cálculo, estadística y trigonometría. Su punto fuerte es que permite **visualizar todos los pasos** que han llevado a resolver la operación planteada con lo cual se convierte en un estupendo método de aprendizaje y repaso. Esto la convierte en algo más que una simple calculadora científica.

MyScript Calculator.

sí como *PhotoMath* no admitía texto escrito a mano, esta aplicación **reconoce tu escritura** (a no ser que escribas excesivamente mal), y además realiza la operación que le hayas planteado. Permite resolver fracciones, operaciones trigonométricas, logaritmos y mucho más.

Calculadora gráfica de Mathlab.

Es una **calculadora gráfica científica** integrada con álgebra. Su interfaz es bastante simple y tiene botones interactivos con diferentes funciones y acciones. Podrás obtener los resultados con gran rapidez. Además, te **muestra los pasos intermedios** de los cálculos. Los gráficos son bastante buenos.

FORMULAS FREE

Reúne todas las fórmulas matemáticas, desde las más básicas a las más complejas. Incluye contenido de geometría, álgebra, trigonometría, geometría analítica, integrales… Además, cuenta con la posibilidad de guardar las fórmulas utilizadas más frecuentemente en una carpeta de favoritos.

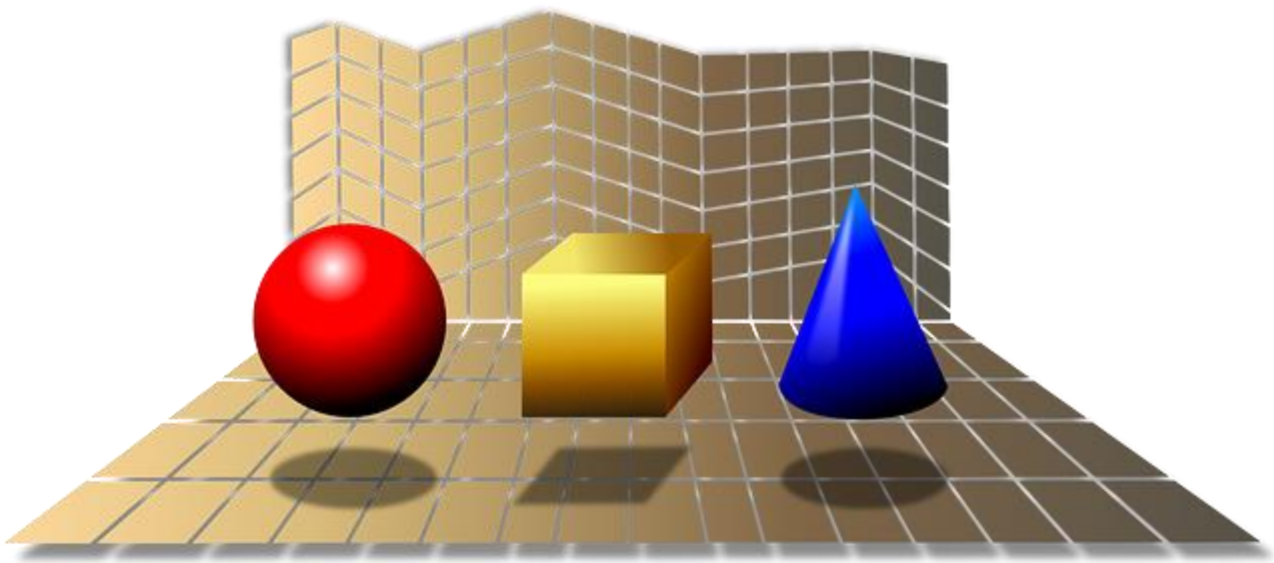
Matemáticas Prácticas

Con este juego se pueden practicar operaciones sencillas de suma, resta, multiplicación y división con números que van desde el 0 al 35. Se puede establecer un contador de tiempo que ayuda a motivar a los niños, y se guardan automáticamente los resultados y el rendimiento de cada prueba.

Fracciones Calculadora Gratis

Una calculadora para resolver o revisar fracciones matemáticas. Muestra los cálculos de forma clara, los resultados se reducen automáticamente, y también se muestran los decimales para que la conversión sea más fácil.

Fuente: Imagen recuperada de: www.pixabay.com junio 2021



GEOMETRÍA ANALÍTICA